

MADRAS GOVERNMENT ORIENTAL SERIES

Published under the authority
of the
Government of Madras

General Editor :

T. CHANDRASEKHARAN, M.A., L.T.,
Curator, Government Oriental Manuscripts Library, Madras

No. III

ஆஸ்தான கோலாஹலம்

ASTHANA KOLAHALAM

Critically Edited By

THIRUMALAI SREE SAILA SARMA

Government Oriental Manuscripts Library, Madras.

1951

PRICE Rs. 5-0-0

PRINTED AT THE
SOLAR WORKS, MADRAS-1.

INTRODUCTION

The Government of Madras took up for consideration the question of publication of the various manuscripts in different languages on subjects like Philosophy, Medicine, Science, etc., early in May, 1949. Important Manuscripts Libraries in the Madras Presidency were requested to send a list of unpublished manuscripts with them for favour of being considered by the Government for publication. The Honorary Secretary of the Tanjore Maharaja Serfoji's Sarasvathi Mahal Library, Tanjore, alone complied with this request. This list as well as a similar list of unpublished manuscripts in the Government Oriental Manuscripts Library, Madras, were carefully examined and a tentative selection of manuscripts suitable for publication was made. The Government in their Memorandum No. 34913/48-10, Education, dated 4-4-1949, constituted an Expert Committee with the Curator of the Government Oriental Manuscripts Library, Madras, as the Secretary, for the final selection of manuscripts suitable for printing and for estimating the cost of publication.

The following are the members of the Committee :—

1. Sri T. M. Narayanaswami Pillai, M.A., B.L.
2. „ R. P. Sethu Pillai, B.A., B.L.
3. „ C. M. Ramachandra Chettiar, B.A., B.L.
4. „ R. Krishnamoorthy, (Kalki).
5. Dr. N. Venkataramanayya, M.A., Ph.D.
6. Sri M. Ramanuja Rao Naidu, M.A.
7. „ V. Prabhakara Sastri.
8. „ N. Venkata Rao.
9. „ H. Sesha Ayyangar.
10. „ Masthi Venkatesa Ayengar.
11. „ M. Mariappa Bhat, M.A., L.T.
12. Dr. C. Achyuta Menon, B.A., Ph.D.
13. „ C. Kunhan Raja, M.A., D.Phil.
14. „ A. Sankaran, M.A., Ph.D., L.T.
15. „ P. Rama Sastri.
16. „ S. K. Ramanatha Sastri.
17. Dr. M. Abdul Haq, M.A., D.Phil., (Oxon.)
18. Afzul-ul-Ulama Hakim Khader Ahamed,

19. Sri P. D. Joshi.
20. „ S. Gopalan, B.A , B.L.
21. „ T. Chandrasekharan, M.A., L.T.

With the exception of Sri Masthi Venkatesa Iyengar, Dr. C. Kunhan Raja, the above members continued to be members of the Expert Committee for 1950-51 also to which the following gentlemen were included in Govt. Memo. No. 7297-E/50-3. Edn, dated 19-5-1950 and Govt. Memo. No. 15875-E/50-4. Edn., dated 7-9-1950.

1. Dr. A. Chidambaranath Chettiar, M.A, Ph. D.
2. Sri S. Govindarajulu, B.A , B.L , LL.B., Bar-at-Law,
3. Capt. G. Srinivasamoorthy, B.A., B.L., M.B., & C.M.
4. Dr. Muhammed Hussain Nainar, M.A., Ph. D.,
5. Sri T. V. Subba Rao, B.A., B.L.,
6. Principal, College of Indian Medicine, Madras.

The members of the Committee formed into Sub-Committees for the various languages, Sanskrit, Tamil, Telugu, Kannada, Malayalam, Mahrathi and Islamic Languages. They met during the month of May, 1949, at Madras and at Tanjore to examine the manuscripts and make a selection. The recommendations of the Committee were accepted by the Government and they have decided to call these publications as the "MADRAS GOVERNMENT ORIENTAL SERIES," and appointed the Curator, Government Oriental Manuscripts Library, Madras, as the General Editor of the publications.

The following manuscripts were taken up for publication during 1949—50

"A" From the Government Oriental Manuscripts Library, Madras

TAMIL

1. KAPPAL SATTIRAM.
2. ANUBHAVA VAIDYA MURAI.
3. ATTANAKOLAHALAM.
4. UPADESA KANDAM.
5. COLAN PURVA PATTAYAM.
6. KONGA DESA RAJAKKAL
7. SIVAJNANA DIPAM.

TELUGU

1. AUSADA YOGAMULU.
2. VAIDYA NIGHANTU.
3. DHANURVIDYA VILASAMU.
4. YOGA DARSANA VISAYAMU.
5. KHADGA LAKSANA SIROMANI.

SANSKRIT

1. VISANARAYANIYAM.
2. BHARGAVA NADIKA.
3. HARIHARACATURANGAM.
4. BRAHMASUTRAVARTTI MITAKSARA.
5. NYAYASIDDHANTA TATVAMRTAM.

MALAYALAM

1. GARBHA CIKITSA.
2. a. VASTULAKSANAM.
b. SILPAVISAYAM
3. MAHASARAM.
4. KANAKKUSARAM.
5. KRIYAKRAMAM.
6. KANAKKUSARAM—BALAPRABODHAM.

KANNADA

1. LOKOPAKARA.
2. RATTAMATA.
3. ASVASASTRAM.
4. VIVIDHA VAIDYA VISHAYAGALU
5. SANGITARATNAKARA
6. SUPASASTRA.

ISLAMIC LANGUAGES

1. JAMIL—AL—ASHYA.
2. TIBB—E—FARIDI.
3. TAHQIQ—AL—BUHRAN.
4. SAFINAT—AL—NAJAT.

*"B" From the Tanjore Maharaja Serfoji's Sarasvathi Mahal
Library, Tanjore.*

TAMIL

1. SARABENDRAVAIDYA MURAI. (Diabetes).
2. Do. (Eyes).
3. AGASTIYAR
4. KONKANARSARAKKU VAIPPU.
5. TIRUCHITRAMBALAKKOVAIYAR with Padvurai.
6. KALACAKRAM.
7. TALASAMUDRAM.

8. BHARATANATYAM.
9. a. PANDIKELI VILASAM NATAKAM.
b. PURURAVA CAKRAVARTI NATAKAM.
c. MADANA SUNDARA VILASA NATAKAM.
d. PERCY MACQUEEN'S COLLECTION in the Madras University Library on Folklore.
10. RAMAYAN AMMANAI.
11. TAMIL, PADALKAL including Pattinattar Venba and Vannankal.

TELUGU

1. KAMANDAKANITISARAMU.
2. TALADASAPRANAPRAADIPIKA.
3. a. RAGHUNATHA NAYAKA ABHYUDAYAMU.
b. RAJAGOPALA VILASAMU
4. RAMAYANAMU by Katta Varadaraju.

MAHRATHI

1. NATYASASTRA SANGRHA.
2. a. BOOK OF KNOWLEDGE.
b. FOLK SONGS.
c. DORA DARUN VENI PADDHATI
d. ASVASA CATULA DUMANI.
3. a. PRATAPASIMHENDRA VIJAYA PRABANDHA.
b. SARABHENDRA THIRTHAVALI
c. LAVANI.
4. DEVENDRA KURAVANJI
5. BHAKTA VILASA.
6. SLOKA BADDHA RAMAYANA.

SANSKRIT

1. ASVASASTRA with Tricolour illustrations.
2. RAJAMRGANKA.
3. CIKITSAMRTASAGARA.
4. AYURVEDAMAHODADHI.
5. GITA GOVINDA ABHINAYA.
6. a. COLACAMPU.
b. SAHENDRA VILASA.
7. DHARMAKUTAM—Sundara Kanda.
8. JATAKASARA.
9. VISNUTATTVANIRNAYA VYAKHYA
10. SANGITA DARPANA
11. BIJAPALLAVA

During 1950, only the Sub-Committees for Tamil, Telugu and Kannada met in the month of July 1950 at Madras. The following books were taken up for publication in the various languages in 1950-51.

TAMIL

- | | |
|------------------------------------|----------|
| 1. DAKSHINAMURTHY-VAIDYA ATTAVANAI | Medicine |
| 2. VISVAMITRAVYAKHYA. | ... |
| 3. ANUBHAVAVAIDYAM. | ... |

TELUGU

- | | |
|-------------------------|---------------|
| 1. SAIVACARASANGRAHAMU. | .. Philosophy |
| 2. AUSADAYOGAMULU. | ... Medicine |
| 3. ABHINAYADARPANAMU. | ... Dance |

SANSKRIT

- | | |
|--------------------------------|--------------|
| 1. AROGYACINTAMANI. | ... Medicine |
| 2. TATVASARA with Ratnasarini. | Philosophy |
| 3. SUTRARTHAMRTA LAHARI. | ... |

MALAYALAM

- | | |
|-----------------------|---------------|
| 1. ASVACIKITSA. | ... Medicine |
| 2. PALASARASAMUCCAYA. | ... Astrology |

KANNADA

- | | |
|--------------------------|--------------|
| 1. VAIDYA SARA SANGRAHA. | ... Medicine |
|--------------------------|--------------|

It is hoped that the publication of most of the important manuscripts will be completed within the next four years.

Some of the manuscripts taken up for publication are represented by single copies in the Library and consequently the mistakes that are found in them could not be corrected by comparing them with other copies. The editors have, however, tried their best to suggest correct readings. The wrong readings are given in round brackets and correct readings have been suggested in square brackets. When different readings are found, they have been given in the footnotes except in the case of a few books in which the correct readings have been given in the footnote or incorporated in the text itself.

The Government of Madras have to be thanked for financing the entire scheme of publication although there is a drive for economy in all the departments. My thanks are due to the members of the Expert Committee who spared no pains in selecting the manuscripts for publication.

I have also to thank the various editors, who are experts in their own field, for readily consenting to edit the manuscripts and see them through the Press. The various Presses that have co-operated in printing the manuscripts in the best manner possible also deserve my thanks for the patience exhibited by them in carrying out the corrections made in the proofs.

The present edition is based on the single palm-leaf manuscript presented to Govt. Oriental Manuscripts Library in 1921-22 by Mr. Sankaravenkataramayyengar of Periyakulam. This Manuscript has been described under R. No. 507. The size of the manuscript is $16\frac{1}{2} \times 1\frac{5}{8}$ inches. This contains 84 pages having 6 lines on a page. This is a treatise on Mathematics calculations in Tamil in this country are of a special nature having separate symbols for various fractions. People knowing these symbols are very few. Hence I had much difficulty in getting this book edited by a competent person, who knows both ancient modern methods of calculation. The same difficulty was experienced by me, in getting a printer. Only two presses were prepared to take up this work as it involved the special casting of a number of symbols peculiar to Tamil Arithmetic.

The Solar Works, though they refused to take up the work in the beginning, finally consented to print the work at a comparatively moderate rate, and have completed the work in the best manner possible.

The Editor has added his own explanation and has drawn various figures that are printed in this work. The Original Text as found in the manuscript is printed with a slight indent, having a small margin on the left. It is regretted that the Editor was not able to write an introduction to the work due to various causes.

Reference is to be made to the good work done by Sri V. R. Kalyanasundaram, Pandit of this Library for going through the proof.

Govt. Oriental Manuscripts }
Library, Madras.

T. CHANDRASEKHARAN,
General Editor,
Madras Govt. Oriental Series.

ஆஸ்தான கோலாஹம்

முன்னாற்கணக்கால் மொழிந்தவை தன்னை

என்னால் திவிளியென்ற மரியாதி

சின்னாற்கணக்காய்த்திரட்டி யக்கணக்கும்

நன்னால் வர்முன் நயந்துறைப்பேனே “(1)”

நாலாகலை நியுணர் மிக்கான குணசீலர் நல்லறிவுள்ளோர்கள்

மேலான யெக்கணக்கும் தான் வகையுள்ளதெல்லாம் விளம்பீரீ

[தென்ன

பாலானவாரிதனிற் பிறந்த மிர்தம்போலும் பண்பாகுமாள்தான

கோலாகலமென்னும் பேர்வகுத்து மாப்பாடியக் கூறினேனே (2)

கூடலில் நாகன் குணம் ஓர்வளித்த

ஆவர்தாரின னாவிளிப்பெருமாள்,

பாடலைப் பாணர்பாதம் பணிவோன்

நாடவர் நகைக்க நயந்துறைப்பேனே (3)

ஆஸ்தான கோலாகலச் சுருக்கம் வருமாறு:—

“என்னும் எழுத்துங் கண்ணெனத்தகும்;; என்றவ்வை சொன்னாற் போலும்; “பொன்னென்று பணிபல; வென்றார் போலும் சகலமான கணக்கும் எண்சுவடி என்னுமதாய்ப் பள்ளிக்கூடம் விட்டுக்கணக்கு எழுதா; போன உடனே எண்சுவடி மறந்து தடுமாறுகிற பேரும் உண்டு. யுத்திகாரன் நினை விட்டுக் கொண்டு கேட்ட வகைக்கெல்லாம் தடுமாற்ற மில்லாமல் சொல்லுகிற பேரு முண்டு.

இந்தச் சுருக்கம் கத்திருந்து வகைவந்தால் யுத்திகாரனுக்கு எந்த உரையிலே எழுதினாலும் நாலு கணக்குப் பிள்ளைகளுக்கு முன் கேட்டவகை சரிக் கட்டிச் சொல்லும் பேருண்டாக்கி வைக்குமாகையாலே இந்தச் சுருக்கம் அங்கத்தால் (எண்களால்) மந்தகை இருங்கிற பேரும், யுத்திகாரனாக இருக்கிறபேரும், கேட்ட வகை சொல்லவல்லவகை இருப்பான். யுத்திக் காரராயிருக்கிற பேர் கற்றால், பொற்பூனில் வாஸனை பிறந்தார்ப்போல் எண்ணப்பட்டதாக, ஆயிறத்திலொருவனென்று சொல்லியிடமாயிருக்கும். மத்த அதிகாரம் விரிவிட்டுச் சொல்லி வைத்தபடியினாலே ஒன்றும் வந்து ஒன்றும் வராமலுமாக விருக்கும். (என்றால் உதாரணத்தில் வந்தவைகள் சிலவும், வராதவைகள் சிலவுமாக இருக்குமாகையால் முக்கியமாய்க் கவனிக்கவேண்டிய வகைகள் யாவும் பொது வழியிலேயே என்பது அவசியம் உணரத்தக்கதாம்)

அந்தக் கணக்கதிகாரங்களை குருவாக எண்ணிச் சுருக்கமாக எந்த வகைக் கணக்கிலும் குறுக்கமாக அளக்கப்பட்டதும், எண்ணிக் கைப்பட்டதும், உள்வட்டம், பிரவட்டம், முத்துகை, விகற்பக்கடைதலை, விலப்பூட்டு, சேவிக் தான் கணக்கு, நிலத்தீர்வை, பணவரிசை, நெல் வரிசை, கொள்ளுகிற வகை, விற்கிறவகை; நிலமளவு, காலளவு, (காலஅளவு) குளவெட்டு, மரக்காலசியன், நெல்லுக்குத்த-விடுகின்றது, ஐவகை விகற்பம், ஏ(ளு)முவகை விகற்பம், ஒன்பது துகை விகற்பம், பதினொரு தொகை விகற்பம் அப்பாலும்படிப் பேரிட்டு வந்த விகற்ப (விகற்பம் என்றால் வேற்றுமை என்பது பொருள்) க் கணக் கெல்லாம் சுருக்கமாகச் சொல்லுகிறேன்.

அது எப்படி யென்னில்:— விரித்துக்காட்டல் — முத்துகையாக வந்த வகைக்கெல்லாம் நடுவுங்கடையும் பெருக்கி முதலுக்குக் கொடுத்து ஒரு தனிப் பேர் சொல்லுகிற இனமுண்டு. (1).

கடைதலை(யி)ல் முட்டாக முதலுங்கடையும் பெருக்கி நடுவுக்குக் கொடுத்து ஒரு தனிப்பேர் சொல்லுகிற இனமுண்டு. (2).

முத்து கையில் வந்த இனம் கடைசியில் வந்தால் நடுவுங்கடையும் பெருக்கி முதலுக்குக் கொடுத்தால் அதுவே தீர்வை (3).

நடுவும் கடைசியில் முதலுங்கடையும் பெருக்கி நடுவுக்குக் கொடுத்து ஒருவன் (ஒன்றின்) பேர் சொல்லுவது. (4).

அப்பத்துகை விகற்பத்துக்கு:— முன்(ளி)னரையைப் பெருக்கி நிறுத்திப் பின்னரையு மந்தப்படியே பெருக்கி இதை முன் துகைத்தீருவையப் போல் நடுவுங்கடையும் பெருக்கிக் கண்டது, நிருத்தின துகைக்குக் குறித்தது அதிலே (அதனீவையே) தீருவையாகச் சொல்லவும் (5).

இப்படிப் போலவே:— ஐந்துகை, ஏழுதுகை, ஒன்பது துகை பதினொரு துகை, (ஆக) வந்த (துக்கெல்லாம்) தற்கெல்லாம் இப்படிக்கண்டு சொல்லவும்.

இங்குள்ள சொல்லப்பட்ட கணக்கெல்லாம் தீபரமாகச் சொல்லுகிறதற்கு வகை விபரம்.

குணமாராட்டமாக வருகிற கணக்கும் பரத்திலே, இனத்திலே விரித்துக் காட்டல்:— திவாகரம், உருச்சொலக்கவிச் சொன்னப்போலும், அப்படிக்கேட்ட கணக்கெல்லாம் சுருக்கமாகச் சொல்ல பந்துக்கட்டு பெருக்குகிற வகை யறிய சினவு:—

யருய ரு குழி யெத்தனை யென்றால் குழி-ள-ஆமே. அதற்குஸ்தானம்-ய-ரு (க்கு) ஸ்தானம் க. ய; ஆ (ஆகஸ்தானம்) உ. மத்தய-ய-ருத்தானம் உ. ஆத்தானம்-ச-ரு-க-தள்ளி நின்ற ஸ்தானம் ஈ-(3); ஆகையால் நூறுக்குத்

ஈ று ஈ று குழி எத்தனை யென்றால்; ஈ று ஈ று-ய்த் ஆமே. [இங்கு ::
த்=1000;] இதற்குநான விவரம்:—; க-ய-ஈ ஆகஸ்தானம் ௩; மத்த
ய-ஈ-க்கு ஸ்தானம் - ௩; ஆகஸ்தானம் ௬ (3+3)=(6) ஆறுக்கு க தள்ளி யின்ற
ஸ்தானம். ௬-ஐந்து. ஒன்று முதல் ௬ (ஐந்து) மட்டிம் நடத்த க-ய-ஈ-த்-ய்த்.
ஆகலால்:—ஈ று ஈ று குழி ய்த். (நூறுக்கு நூறுக்குக் குழி பத்தாயிறம்)
(100×100)=10000 என்பது (2).

யிசுரூ யிசுரூ ஸ்தானம் (குழி) பெத்தனை என்றால் யிசுரூ த்தானம்- க-ய-
 ன-சூ-யிசூ-ஆகஸ்தானம் (௫=5). மத்தய பத்தாயிரத்துக்கு (யிசுரூ) த்தானம்
 ௫=5; ஆகஸ்தானம் யி = 10க்கு ஒன்று தள்ளி நின்ற ஸ்தானம் = (கூ = 9)
 ஒன்பது இதை க-முதல் கூ-மட்டும் நடத்த—க-ய-ன-சூ-யிசூ-யாசூ-யாசூ (யாசூ =
 கோடி)-(யாசூ = பத்துக்கோடி); (ஆதலால் [யிசுரூ-யிசுரூ குழி யிக் கோடி]
 = (பத்தாயிரத்துக்குப் பத்தாயிரத்துக் குழி பத்துக் கோடி) என்பது இதன் =
 $10000 \times 10000 = 10,00,00,000 =$ பத்துக் கோடி யாகும் என்பது (4)

க-யி-ந-ந-யி-ந-யி-ந-கோடி. - யி கோடி - ந கோடி-நக் கோடி-யி-நக்
கோடி-நநக் கோடி-யி-நநக் கோடி-மகா கோடி.

இதற்கின்னும் விவரணம் :—

இந்த இந்த ஸ்தானத்துக்கு	எழுத்தினால் பெயர்கள்	பூர்வீகர் உபயோகித்த தமிழ் எண்களின் பெயர்களுக்குரிய குறிப்பு (அடையாளம்)	தற்காலத்தில் உப யோகித்து வரும் பெயர்களுக்குக் குறிப்பு (அடையாளம்)
1 ரு	ஒன்று	க	1
2 ரு	பத்து	ப	10
3 ரு	நூறு	ந	100
4 ரு	ஆயிரம்	சூ	1000
5 ரு	பதினாயிறம்	பிசூ	10000
6 ரு	லக்ஷம்	நாசூ	100000
7 ரு	பத்து லக்ஷம்	(பொசூ = சூசூ)	1000000
8 ரு	கோடி	(கோடி = பிசூசூ = நாசூ)	10000000
9 ரு	பத்து கோடி	(ப கொடி = பொசூ) =	100000000
10 ரு	நூறு கோடி	(ந கொடி = நாசூ)	1000000000
11 ரு	ஆயிரக் கோடி	சூக் கோடி	10000000000
12 ரு	பதினாயிரக் கோடி	பிசூக் கோடி	100000000000
13 ரு	நூறுபிறக் கோடி	நாசூக் கோடி	1000000000000
14 ரு	பத்து நூறு பிறக் கோடி	பொசூக் கோடி	10000000000000
15 ரு	மகா கோடி	$\left\{ \begin{array}{l} \text{(கோடி கோடி)} \\ = \text{(நாசூக் கோடி)} \\ = \text{(பிசூசூ கோடி)} \end{array} \right\}$	100000000000000

ஆதலால் கோடிக்குக் கோடி என்பது (5).

• விட்டேறு லக்கமாக வந்தாலும், மாறுபாகமாகச் சொல்லி வந்தாலும், கணக்குச் சொல்லுகிறதற்கு வகை :—

இருபத்துக்கும்-உாரும் (20 × 200) குளி (குழி) பெத்தனை யென்றால் :—
உாறு ஸ்தானம் உ-உயி-உா-ஆகத்தானம் ஈ (முன்று). மத்தய உயி (20)ம் ரெண்டும் மாற (பெருக்க) சயி (40) இதை முன்று (ஸ்தானம்) மட்டும் நடத்த சயி - சா - சந் (40 - 400 - 4000) = (20 × 200 = 4000) ஆதலால் உயி உாறு குழி எத்தனை என்றால் சந் என்பது.

சா.று.சாறு குழி எத்தனை யென்றால் சாறு ஸ்தானம் (முன்போல்)-ச-சயி-சா ஆக ஸ்தானம் ஈ. மத்தய-சா-று ஸ்தானம் ஈ. ஆகஸ்தானம் சு (6) று ஆறுக்கு (க) ஒன்று தள்ளி நின்ற ஸ்தானம் று-ஐந்து-ஸ்தானம் (று) ஐந்து மட்டும் நடத்த ∴ [(சுசுசு = யா) = (4 × 4 = 16);] ∴

யசாசயி-சுசா-யசுசு-யசுசு (16-160-1600-16000-160000) ஆதலால் சாறு சாறு குழி யசுசு (லக்ஷத்தறுபதாயிரம்) (நூத்தறுபதாயிரம்) என்பது.

சாறு சுசுறு குழி எத்தனை யென்றால்-சா று த்தானம் ச-சயி-சா ஆக தானம் ஈ, மத்த-சுசு றும் சறும் மாற-உயிசுசு (4 × 6000 = 24000) இதை ஈ மட்டும் நடத்த (ஏற்படும் ஸ்தானங்கள்) உயிசுசு - உாசயிசுசு-உயிசாசுசு (24000-240000 — 2400000) ஆதலால் சாறும் சுசுறு குழி (உயிசாசுசு = 24,00,000) இருபத்து னான்கு லக்ஷம் (400 × 6000 = 2400000) பென்பது.

உயிசுறு ஈயாசுறு குழி (அதாவது இருபதாயிரத்துக்கும் முப்பது லக்ஷத்துக்கும் = 20000 × 3000000) குழி எத்தனை யென்றால் உயிசுறுத்தானம் — உ-உயி-உா-உசு-உயி ஆகத்தானம் று (= 5) என்று வைத்து ஈயாசு று உறு மாற-சுயிசுசு = (60,00,000) இதை-று-மட்டும் நடத்த (க்கண்டது) சுயிசுசு-சுகோடி-, சாயிகோடி - சுகோடி - சுசுக்கோடி = (6000000 - 60000000 - 600000000 - 6000000000) = (20,000 × 30,00,000) = 60000000000 ஆதலால் உயிசுறு ஈயாசுறு குழி சுசுக்கோடி (இருபத்தாயிரத்துக்கும், முப்பது லக்ஷத்துக்கும் குழி, ஆறுயிறக் கோடி-) என்பது. [இதற் கிவ்விதமுஞ் செய்யலாம்: — உயிசுறுத்தானம் = 5 இவ்விதமே ஈயாசுறுத்தானம் ஈ-ஈயி-ஈா-ஈசு-ஈயிசு-ஈாசு-ஈயிசு = (3-30 - 300 - 3000 - 30000 - 300000 - 3000000) இதற்குத்தானம் = 7 = (எ) இந்த 7ம் ஷெ 5ம் சேர்க்க 12இதில் (1) தள்ள (11) தானம். ஷெ 2ம் 3ம் பெருக்க (2 × 3) = 6 இந்த (சு) ஷெ (யக = 11)த் தானம் மட்டும் நடத்த ஷெ போல்:—

சு = (ஆறு)

சாயி = (ஆறுபது)

சா = (ஆறுநூறு)

சுசு = (ஆறுயிறம்)

சுயிசு = (ஆறுவதாயிரம்)

சாசு = (ஆறுலக்ஷம்)

சுயிசுசு = சுயி லக்ஷம்

சாசுசு = சு கோடி

• சுயிசுசுசு = சுயி கோடி

$$\begin{aligned} \text{கூர்மானி} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{கூர்} \\ \text{கோடி} \end{array} \right\} \\ \text{கூர்மானி} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{கூர்} \\ \text{கோடி} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

என்றுஞ் சுலபமாகத்தானங் கணிக்கலாம்.]

கூர்மானி ருசுமானி ரு குழி யெத்தனை என்றல் [அறுபது லக்ஷத்துக்கும் நாற்பது லக்ஷத்துக்கும் = (6000000 × 4000000) குழி யெவ்வள வெனில்].

சுமானி ரு த்தானம் - ச - சுய - சா - சத் - சுயத் - சாத்
சுமானி - ஆகஸ்தானம் - எ - (ஏழு—7) இருத்தி, மத்தய சுமானி ருசு
ரும் பார உ கோடியே சுமானி-இதை (தானம்) [எ] (ஏழு) மட்டும் நடத்த (ஏர்ப்
படுவது) — உ கோடியே சுமானி₁ - உயிச கோடி₂ - உாசய கோடி₃ - உன்சா
கோடி₄ - உயிசத் கோடி₅ - உாசயத் கோடி₆ - உயிசாத் கோடி₇
(கூ. 6000000 × 4 = 24000000, இவ்வுகோடியே நாற்பது லக்ஷம்
இதை ஸ்தானம் ஏழுமட்டும் நடத்தும் விதம் - 24000000; 240000000;
2400000000; 24000000000; — 240000000000; 2400000000000 —
24000000000000) இருபத்து நான்கு நூறுயிரக்கோடி ஆதலால் சுமானி ரு
சுமானி ரு (அறுபது லக்ஷத்துக்கும், நாற்பது லக்ஷத்துக்கும்) குழியெத்தனை
யென்றல் உயிசாத்கோடி (6000000 × 4000000) = (24000000000000)
— (இருபத்து நான்கு நூறுயிரக்கோடி) என்பது. —

இனிச் சில்வானம் வந்தால் சீக்கிரம் பெருக்கிச் சொல்ல வகை :—

கவனிக்கவேண்டிய இனப்பாருபாடுகளிங்கு :—

குறிப்பு :— (ரு) = க்கு என்றாகும், இனு = இனம் என்றாகும் —
இனம் என்னும் ஸ்தானத்தில் (இனு) என்றே மூலச்சுவடியில் காணப்படு
கின்றது.

யரு இனம் = க;₁ எஇரு இனம் = ஜ;₂ ருரு இனம் = இ;₃ உஇரு இனம்
= வ;₃ கவரு இனம் = பூ;₅ இபூரு இனம் = ய;₆

[இங்கென்ன விசேஷமென்றால் இனிசொல்லப்போகும் விஷயம் பின்ன
ருபத்தில். ஆகையால் பத்தை ஒன்றாக பாவனைசெய்து மேலே சொல்லப்
பட்ட இனவரிசைகளைக் கவனிக்குமளவில் — பொதுவாகப்பத்தை (யரு)
ஆதாரமாக எடுத்துக்கொண்டால் :—

ஆதார எண்களுக் குறிய இனம்	பின்னத்தில்	தசம பின்னத்தில் (தசாம்ச பின்னத்தில்)
1 யரு = (10க்கு)	(க = 1)	(10 ÷ 10) = 1,
2 எஇரு = (7½க்கு)	(ஜ = ¾)	(7½ ÷ 10) = 0.75,
3 ருரு = (5க்கு)	(இ = ½)	(5 ÷ 10) = 0.5,
4 உஇரு = (2½க்கு)	(வ = ¼)	(2½ ÷ 10) = 0.25,
5 கவரு = (1¼க்கு)	(பூ = ⅛)	(1¼ ÷ 10) = 0.125,
6 இபூரு = (⅝க்கு)	(ய = 1/16)	(⅝ ÷ 10) = 5/80 0.0625,

இப்படி யேற்படுவதால் இதன் விசேஷங்களை (தசாம்சகணித சம்பந்தமாக நம்பூர்வீகர்கள் கணிதத்தில் எண்ணிவந்த விசேஷநிர்ணயங்களுடைய கருத்துக்களை) முன்னுரையில் நன்கு காண்க] என்பது.

இடைவெளித்தானம், மூலம் கனப்படுத்தல் கனத்தை மூலப்படுத்தல் இந்த இரண்டு வகைக்கும் முன்னிது பின்னிதாம், பின்னிது முன்னிதாம் கொள்ளலாம். விபரம் (ஒன்று).—

க. வுத: வுத = $(1 \times \frac{1}{320} = \frac{1}{320})$; ம.வுத: கி = $(10 \times \frac{1}{320} = \frac{10}{320} = \frac{1}{32})$;
 ஈ. வுத: வய = $(100 \times \frac{1}{320} = \frac{5}{16})$;

க. ரி: ரி = $(1 \times \frac{1}{160} = \frac{1}{160})$; ம.ரி: ய = $(10 \times \frac{1}{160} = \frac{1}{16})$;
 ஈ. ரி: இய = $(100 \times \frac{1}{160} = \frac{5}{8})$;

இவ்விதம் பயிற்சியின் காரணமாக மற்றும் கீழ்வருவன யாவும் கவனிக்க:—

ரிவுத-பசுரி-வுதநி-உ-பு-கவ - உவுத - ... ரி - ... இப - உரி நி-கனபு-
 உரிவுத - கிஉரி - உநி - சுவஉஇ - சுவுத - வகி - வுத - ய - கிவப-நுபு-சுரிவுதவ
 பசுரி-நி-வநி-சு-வபு நு-சுவுதவநி-நி-சு-ப-சுரிவநி-

சுவபு சுரிவுத-வகிஉரி-சுஇநி- (ப-இ-நு) (ஃ-க-ய) - ரி = கஇ = மரு -
 கி-உ உய-ய-இபு-சுவ; பு கவ-மஉஇ; நி-கனபு-யஅத-

உஇ-உயரு; வய-நுபு நுபகவ; வபு-நு-நுபுஇ; வநி-சுவபு-சுமநு; இ-
 ரு-ருய; இப-ருஇபு-ருயசுவ; இபு-சுவ-சுமஉஇ; இநி-சுநுபு-சுயஅத --

நு-எஇ-எயரு; நுய - அபு-அயகவ-நுபு-அத - அயஎஇ - நுநி-கவபு-
 சுயநு-க-ய-நி-நி-ய-நி-ய-நி - யாநி - கோடி - மக்கோடி - நகோடி - நக்கோடி -
 மக்கோடி-நக்கோடி - யாநிக்கோடி - மகாகோடி.

[இவ்விதம் பின்ன வாய்ப்பாடுகளைச் சுருக்கிக் கர்த்தா கூறியிருக்கிறார். கிரந்தம் பார்க்கும் தோஷம் எழுதும் தோஷம் இவைகளை முன்னிட்டோ அல்லது எந்தக்காரணத்தாலோ இவைகள் ஒழுங்குபெற வரிசைப்படி வரவில்லை இவைகளுடைய சர்வ சந்தேக நிவாரணத்திற்காக முந்திரி முதற்கொண்டு சிலமுக்கியமான (முன்னுறையிற் கண்ட) பின்ன வாய்ப்பாடுகளை மனப்பாடம்

செய்வதற்காகவே இப்பட்டி தயார்செய்தது. இதில் கண்ட பெயர் உச்சரிப்பு (ஸம்க்ளை) குறிப்புகள் இவைகளைக்கொண்டு பெரிய கெட்டி எண்கவடி முதலியவைகளில் உள்ள முந்திரி முதலிய பின்ன வாய்ப்பாடுகளைக் கொண்டும்; பெருகுழி சிறுகுழி முதலிய வாய்ப்பாடுகளைக்கொண்டும்; (மனப்பாடம் செய்து) லேசு சுலபமாகக் கணிக்க இயலும்.

மேலும் இந்த கணித புத்தகத்தில் கீழ்வாய் லக்கங்களும் சிலவிடங்
ளில் வருகிறது. சிறுகுழிக்கணிதத்தில் அவசியம் கீழ்வாய் லக்கங்கள் வந்தே
தீரும். ஆகையாலந்த பின்னங்களின் தமிழ் பெயர்கள் குறியீடுகள் இதற்குச்
சரியான தசாம்சபின்னங்கள் அடங்கிய பட்டி. விவரம்.

வரிசை நே.	தமிழில் பெயர் கள் (அல்லது) உச்சரிப்புகள்.	குறிகள்	1க்குரிய அம் சங்கள் (ஸமான பின்னம்)	தசாம்ச பின்னம்
1	முந்திரி	(ஷ)	(1/320)	0.003125,
2	அரைக்காணி	(ற)	(1/160)	0.00625,
3	காணி	(ள)	(1/80)	0.0125,
4	அரைமா	(= சு)	(1/40)	0.025,
5	முக்காணி	(சுஜ = கூ)	(3/80)	0.0375,
6	ஒருமா	ப	(1/20)	0.050 = (0.05),
7	விசம்	(பஜ = ய)	(1/16)	0.0625,
8	ரண்டுமா	ஐ	(1/10) = (0.1)	0.100 = (0.1)
9	அரைக்கால்	(ஹ = டு)	(1/8)	0.125,
10	மும்மா	று	(3/20)	0.15
11	மூவீசம்	(று-)	(3/16)	0.1875,
12	நாலுமா	சு	(1/5) = (.2)	0.2
13	கால்	வ	(1/4)	0.25,
14	அரை	(டு = இ)	(1/2)	0.5,
15	முக்கால்	(டு = று)	(3/4)	0.75
16	ஒன்று	க	1	1.00

(17) முக்காணி யரைக்காணி = சுஜு = கூு = $(\frac{3}{80}) = 0.0375$

கீழ்வாய் இலக்கங்களின் விவர மாவன :—

அதாவது

$$(1) \text{ கீழ் } = \text{கீழ் முக்கால்} = (320 \times \frac{3}{4}) = (1280),$$

$$(2) \text{ கீழ் இ} = \text{கீழ் அரை} = (320 \times \frac{1}{2}) = (160),$$

$$(3) \text{ கீழ் வ} = \text{கீழ் சால்} = (320 \times \frac{1}{4}) = (80),$$

$$(4) \text{ கீழ் பூ} = \text{கீழ் அரிக்கால்} = (320 \times \frac{1}{8}) = (40),$$

$$(5) \text{ கீழ் ய} = \text{கீழ் யிசம் அல்லது கீழ்மக்காணி} = \frac{1}{320 \times 16}$$

$$(6) \text{ கீழ் வது} = \text{கீழ் முந்திரி} = 320 \times 320 = (320)^2$$

$$\text{கீழ் ய} = \frac{1}{320} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{5120}.$$

$$\text{கீழ் வது} = \frac{1}{(320)^2} = \left\{ \frac{1}{320 \times 320} \right\} = \left\{ \frac{1}{102400} \right\} = .000009765625 ;$$

என்ற இவ்வாறு அதாவது (கீழ் முக்கால் என்றால்) (கீழ்) என்றால் (முந்திரியை இங்கு ஆதாரமாக வைத்து) முந்திரிக்கு முக்கால் எவ்வளவு, என்றும் (கீழ் இ) என்றால் முந்திரிக்கு அரைப்பங் கெவ்வளவு, (கீழ் ய) என்றால் முந்திரிக்கு பதினாய்வில் ஓர் பங்கென்ன என்றும், (கீழ் வது) என்றால் முந்திரிக்கு முந்திரி அதாவது 320ல் 1 பங்குக்கு 320ல் 1 பங்கென்ன என்று இவ்வாறெல்லாம் கேட்ட வற்றிற்கு சொல்லக்கூடிய பதிலாம். இது சந்தேகங்கட்கு மேலே காட்டிய விஷய உதாரணங்களாலும், முன்னுறையில் கண்ட பட்டியாலும், இன்னு மேற்படும் சகல சந்தேகமும் நீங்கும்.] அப்பா இவ் கோடி முதல் மகா அற்புதம் மட்டும் வருகிற துறைக்குக் கவி :—

நாக்கோடி. சிங்கம் நல்விந்தம் நாப்பதுமர், மது கொரச்ச முத்திரத்தின் தாமரைவேர், சதவெள்ளம், பிரளயமாம், மெய்த்ததொரை (நு) யோசனை கற்ப நிகற்பம், கடிமகாநதன் பனையுற [அ] பலம், அற்புத மென்றோது (4):—

என்று சொல்லும். இதற்கு ஒன்றின் பேரிலே மகா மகா வென்று — யிச-ஸ்தானம் வரும். ஒன்று முதல் மகா அற்புதம் மட்டும் வருகிற துறைக்கு இனம்-க-ய-ள-சு-யிச-ள-சு-யிச-ஆ கத்தானம் எ-(ஏழு). அப்பால் கோடி முதல் மகா அற்புதம் மட்டும் வருகிற துறைக்கு-இனு உயி-அ-ஆ-இனு-உயி-இ-இந்தப்படி அதிகாரக்காரர் அருளிச்செய்தது.

எதிர் அயிஅரு குழி பெருக்க வென்றால் எதிர். இனம்-ஆ-($\frac{3}{4}$) யென்று வைத்துக் கொண்டு அயிஅ-ரு-ஆ-று பெருக்க-சுயிச-இதைப் (யி) பத்தில் பெருக்க-சுயி-சுள-சு; ஆ-சுள-சுயி.(660); அதனால் எதிர்(= $7\frac{1}{2}$) ரு-அயிஅ (= 88) ரு குழி ($7\frac{1}{2} \times 88 = 616 + 44 = 660$) = (சுள-சுயி)-என்பது. யிஎதிர் ($17\frac{1}{2}$) ரு அயிஅ (88) ரு குழி எத்தனை யென்றால் யிஎதிர் இனம் ($1\frac{3}{4}$) சது-என்று வைத்துக்கொண்டு அயிஅ (88) ரு சது ($1\frac{3}{4}$) ருமபாற ஈருயிச (154); இதனை பத்தில் (யி) படுத்த ஈருயிச (1540 = 154 × 10). என்பது.

யிரு சயிச இப்பு குழி பெத்தனை பென்றல்-யிரு இனம்-கஇ—என்று வைத்துக்கொண்டு சயிச இப்பு $(46\frac{5}{8})$ ரு க இ $(1\frac{1}{2} = \frac{3}{2})$ ரு மாற-(கயிச தூநி)—இதை ய (10)ல் படுத்த காரகயிச வழு $(= 999\frac{3}{8})$ என்பது.

யிச ரு சயிச இப்பு குழி பெத்தனை பென்றல் சயிச இப்பு $(46\frac{5}{8})$ லில் பாதி உயிரு வய $(23\frac{5}{16})$; இதை சயிச இப்பு $(46\frac{5}{8})$ உடனே துக்ககூட்ட கயிச தூநி- $(699\frac{3}{8})$ இதை பத்தில் (யில்) (10-ல்) படுத்த காரகயிச வழு $(699\frac{3}{8})$; மற்ற ஒன்றுக்கு சயிச இப்பு $(46\frac{5}{8})$ துக்ககூட்டினே கூட்ட ளாசயிச-(746) ஆகலால் யிச (16) ரு சயிச இப்பு $(46\frac{5}{8})$ ரு குழி—ளாசயிச (746) பென்பது.

யிச (19) ரு சயிச இப்பு $(46\frac{5}{8})$ ரு குழி பெத்தனை பென்றல்—யிச (19)க்கு மேல் ஒண்ணு கூட்டினால் உயி (20); இதுக்கு இனம்-உ (2); சயிச இப்பு $(46\frac{5}{8})$ ரு உ (2) ரு மாற கயிச வ $(93\frac{1}{4})$. இதை பத்தி (யில்) படுத்த காரகயிச உ இ $(932\frac{1}{2})$, அதில் முன் பத்தொன்பதுக்கு மேல் க (1) கூட்டின துக்கு-சயிச இப்பு $(46\frac{5}{8})$ போக நீக்கி ளா அயிரு தூ ஒ $(885\frac{7}{8})$ குழி என்பது.

யிச இர சயிச இப்பு (அதாவது $19\frac{1}{2} \times 46\frac{5}{8}$) குழி எத்தனை பென்றல் $(19\frac{1}{2})$ (-யிச இர மேல்-இ- $(\frac{1}{2})$ கூட்டினால் உயி (20) (இதற்கினர்) = உ (2); சயிச இப்பு $(46\frac{5}{8})$ ரு உ (2) ரு மாற கயிச வ $(93\frac{1}{4})$; இதை பத்தி (யில்) படுத்த காரகயிச உ இ $(932\frac{1}{2})$ இதில் முன் பத்தொன்பதுக்கு மேல் கூட்டின இ $(\frac{1}{2})$ ரு உயிரு வய $(23\frac{5}{16})$ தள்ளி நீக்கி காரகயிச (909 $\frac{3}{8}$) குழி என்பது.

இந்த வகையை நன்றிப்பிப்பி பார்த்துப் சொல்ல வந்தால் சமயபிசை கூட்டங்களிக்க கணக்குப் பின்னை கெட்டிக்கார நென்று பேரவான்.

யின்னஞ் சில்வானங்கூட்டி பெருக்குகிற வகை :—

யி உ இ $(12\frac{1}{2})$ ரு ஈசயி (160) ரு குழி பெத்தனை பென்றல் யி உ இ $(12\frac{1}{2})$ ரு இனம்—கயி $(1\frac{1}{4} = \frac{5}{4})$; யித றுடனே ஈசயி (160) மாற-உா (200) இதை (யில்) படுத்த உசீ = (2000); ஆகலால் யி உ இ $(12\frac{1}{2})$ ரு ஈசயி (160) ருக் குழி உசீ (2000); என்பது.

யிச தூ (ஹ) ஒ $(11\frac{7}{8})$ ரு-அயி-(180) ரு குழி எத்தனை பென்றல்—யிச தூ (ஹ) ஒ $(11\frac{7}{8})$ ரு இனம் கயி- $(1\frac{3}{8})$ இதனுடனே-அயி (180) யை மாற அயிரு தூ $(213\frac{3}{4})$ இதை-யி (10)ல் படுத்த உசீ ஈசயி இ $(2137\frac{1}{2}) = (11\frac{7}{8} \times 180) = (11.875 \times 180)$; என்பது.

யிச இ $(11\frac{1}{2})$ ரு-அசயி (240) ரு குழி எத்தனை பென்றல் :— யிச இ $(11\frac{1}{2})$ ரு இனம்-(கயி) = (ஒன்றும்மும்மாவுர்) [அகாவது $(11\frac{1}{2} = 11.5) \times \frac{1}{10} = 1.15$;] இங்கு மும்மா = யி = $\frac{3}{20} = 0.15$; $\therefore 11\frac{1}{2}$ ரு இனம் $1.15 =$ கயி என்றபடி] $(1 + \frac{3}{20} =$ கயி). இதனுடனே அசயி (240) மாற அளயிச (276) இதை யி (10)ல் படுத்த உசீ ஈசயி (2760) குழி-என்பது.

ய் இஓ (10⁵/₃) ரு சுமிக ரு குழி எக்தனை யென்றால் :—ய் இஓ (10⁵/₃) ரு இனம் = சுய (1¹/₃ = 1.0625); இகதுடனை-சுமிக- (64) மாற-சுமியு (68) இதை-ய் (10)ல் படுக்க-கூடிய (680) ஆதலால்-சுமிக (64) ரு ய் இஓ (10⁵/₃) ருக்குழி-கூடிய (680) யென்று சொல்லவும்.

இனிக் கூட்டிக் கனிந்து பெருக்கிச் சொல்லுகுர விபரம். விரித்துக் காட்டல்:— \bar{m} நூ (15 $\frac{1}{6}$) ரு \bar{m} நூ (15 $\frac{1}{6}$) ருக் குழி பெத்தனை என்றால், \bar{m} (10) ரு \bar{m} (10) ரா (100); \bar{m} .நூ (10×5) = நூ (50), \bar{m} .த-எஇ = ($10 \times \frac{3}{4} = 7\frac{1}{2}$); ஆகாருயெ இ ($157\frac{1}{2}$); \bar{m} .நஃக ஜூ = ($10 \times \frac{3}{16} = 1\frac{7}{8}$) நாடும்க வழு ($159\frac{7}{8}$); \bar{m} .நூ : நூ ($10 \times 5 = 50$); உாகவழு ($209\frac{3}{8}$); \bar{m} .த: எஇ = ($10 \times \frac{3}{4} = 7\frac{1}{2}$) யும் கூட்ட-உாயசு ஜூ ($216\frac{7}{8}$); \bar{m} .நஃகஜூ ($10 \times \frac{3}{16} = 1\frac{7}{8}$) ஆ உாயஅ து ($218\frac{3}{4}$);— \bar{n} .நூ-உயின ($5 \times 5 = 25$); ஆ உாயநூ ($24\frac{3}{4}$). \bar{n} .த.நூ ($5 \times \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$) ஆ உாயஎ இ ($247\frac{1}{2}$), \bar{n} .நஃதநஃ = ($5 \times \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$) ஆ உாயஅவநஃ = ($248\frac{7}{16}$); \bar{n} (து) நூ ($5 \times \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$) ஆ உாருயஉநஃ ($252\frac{3}{16}$); \bar{n} .நஃ-தநஃ ($5 \times \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$) ஆ உாருயநூ ($253\frac{1}{16}$);— த ரு த: இய = ($\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$) ஆ உாருயநூஇநஃ ($253\frac{11}{16}$); தநஃ-ஐசுவது = [$(\frac{3}{4} \times \frac{3}{16} = \frac{9}{64} = 0.140625) = \frac{1}{10} + \frac{3}{30} + \frac{3}{320}$] அதாவது முக்காலுக்கு மூன்று வீசம் எவ்வளவு பரிமாணம் என்றால் (முக்கால் \times மூன்றுவீசம் = [$(இருமா = \frac{3}{10} = 0.1) + (முக்காணி = சூ = \frac{3}{30} = 0.0375) + (முந்திரி = வது = \frac{3}{320} = 0.003125)$] \therefore \bar{n} .தநஃ = ($\frac{3}{4} \times \frac{3}{16}$) = (ஐசுவது) = $\frac{1}{10} + \frac{3}{30} + \frac{3}{320} = \frac{9}{64}$ = (இருமா முக்காணி முந்திரி) ஆ உாருயநூபசுவது = ($253 + \frac{3}{4} + \frac{3}{10} + \frac{1}{40} + \frac{3}{320} = 253 + \frac{\{(240+16+8+1)\}}{320} = \frac{265}{320} = \frac{53}{64}$) } அல்லது இதற்குச் சமம் = $\left\{ 253 + \frac{1}{16} \right.$

$\left\{ +\frac{9}{64} \right\} = \left\{ 253 + \left(\frac{44+9}{64} = \frac{53}{64} \right) \right\}$ அதாவது இரு நூத்தைப் பத்து முன்றே முக்காலே பொருமா முக்காணி முத்திரி-தூநி-செவ்வது (முன் போலவே மறுபடி $\frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$). ஆக ஊருயிநு தூ சூநி = $\left(253 + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{80} + \frac{1}{160} \right) = 253 + \left(\frac{120 + 32 + 2 + 1}{160} = \frac{155}{160} \right) = \left(253 \frac{31}{32} \right)$; நூ ரு நூ-ச நி வது கீவ = $\left(\frac{3}{16} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{1280} = \frac{45}{1280} = \frac{9}{256} \div \frac{3 \times 3}{16 \times 16} = \left(\frac{9}{256} \right) \right)$; $\left(253 \frac{31}{32} + \frac{9}{256} = 254 \frac{1}{256} \right)$ ஆக ஊருயிச வதுகீவ $\left(254 \frac{1}{256} \right)$; ஆகலால்—மிநு தூநி ரு மிநு தூநி ரு குழி ஊருயிசவதுகீவ $\left(254 \frac{5}{1280} = 254 \frac{1}{256} \right)$ என்பது

[ஆ. கனாக்கின் விசேஷ (க்குறிப்பு :—). உதாரணம் :—

இந்த கணித ஸாராம்சம் என்னவென்றால்:— 10 ஐ நூறு 10 மீது நூறு 10 குழிகணிக்கும் பூர்வீக இந்துக்கள் வழியை இங்கு விளக்கப் படுகிறது. • செ.
 10 மீது நூறு $10 = 15\frac{5}{6} = (10 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16}) \therefore$

$$\therefore (10 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16})^2 = (10 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = A) (10 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = B) \therefore$$

கனிவு-நுயி-ப: உ இ $(50 \times \frac{1}{20} = 2\frac{1}{2})$ மத்தய-நுயி-ப: உ இ $(50 \times \frac{1}{20} = 2\frac{1}{2})$ ஆக
 நு (5) தள்ளி நின்றது உச்சாகுயிரு (2495) இது ஸுடனே-பரு ப: கி னு ப
 $= (\frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{400} = \frac{3}{1280} + \frac{1}{6400} = \frac{15+1}{6400} = \frac{16}{6400} \therefore \frac{1}{400} =$ கீழ் முக்காலேமா)

(ஆகையால் டொத்தம்) கூட்டித் துறை:—(உச்சாகுயிரு கி னு ப) =
 (2495 $\frac{1}{400}$) ஆதலால்:—சயக னு சய (49 $\frac{9}{20}$) ஸ சயக னு சய (49 $\frac{9}{20}$) ஸ (குழி) குழி =
 உச்சாகுயிரு கி னு ப (2495 $\frac{1}{400}$) என்பது.

கீழ்-மேல் கயக னு சய சூ ரி வு து ரு தென்வடல் கயக னு சய சூ ரி வு து ரு
 அதாவது $(99 \frac{319}{320} \times 99 \frac{319}{320})$ குழி பெத்தனை பென்றால்—இதற்கு யேரு
 லக்கத்தையும் (எ. எ: சயக) விரையல்லவா (12ம் பக்கத்தில் காட்டிய விசேஷ
 உதாரணப்படி ஏற்படும் $= 7 \times 7 = 49$ விரையல்லவோ) பெருக்க வேணும்.
 பெருக்கித் துறை காணுகிரவன். தூத்தலொருவன். அப்படி-12-ம் பக்கத்தில்
 காட்டிய வழிப்படிக்கே $(7 \times 7 = 49)$ தரமாக வெகு விஸ்தரமாய்ப் பெருக்கு
 வதற்கு உதாரண மானபட்டி:—

A \ B	90	+ 9	+ $\frac{3}{1}$	+ $\frac{1}{5}$	+ $\frac{3}{80}$	+ $\frac{1}{160}$	+ $\frac{1}{320}$
90	8100	810	$67\frac{1}{2}$	18	$3\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{32}$
+ 9	810	81	$6\frac{3}{4}$	$1\frac{4}{5}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{9}{160}$	$\frac{9}{320}$
+ $\frac{3}{1}$	$67\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{320}$	$\frac{3}{640}$	$\frac{3}{1280}$
+ $\frac{1}{5}$	18	$1\frac{4}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{1600}$
+ $\frac{3}{80}$	$3\frac{3}{8}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{9}{320}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{9}{6400}$	$\frac{3}{12800}$	$\frac{1}{25600}$
+ $\frac{1}{160}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{160}$	$\frac{3}{640}$	$\frac{1}{800}$	$\frac{3}{12800}$	$\frac{1}{25600}$	$\frac{1}{51200}$
+ $\frac{1}{320}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{320}$	$\frac{3}{1280}$	$\frac{1}{1600}$	$\frac{3}{25600}$	$\frac{1}{51200}$	$\frac{1}{102400}$
+ 9999	$8999\frac{23}{32}$	$899\frac{311}{320}$	$74\frac{1277}{1280}$	$19\frac{1599}{1600}$	$3\frac{19197}{25600}$	$3\frac{1999}{51200}$	$3\frac{1999}{102400}$

ஆக கனின் ஸர்வஸம் யோகம் = 9999 $\frac{38401}{102400}$ ஆகுமிதன் $= (A+B)^2$.

$$(8999 + 899 + 74 + 19 + 3) = 9994 = \text{சூ.}$$

$$\frac{23}{32} + \frac{311}{320} + \frac{1277}{1280} + \frac{1599}{1600} + \frac{19197}{25600} + \frac{31999}{51200} + \frac{31999}{102400} = \left\{ \frac{550401}{102400} \right\} =$$

$$(73600 + 99520 + 102160 + 102336 + 76788 + 63998 + 31999)$$

$$102400$$

$$(19) = 5 \frac{38401}{102400}; \text{சூ. (சூ + 19) = } 9994 + 5 \frac{38401}{102400} = 9999 \frac{38401}{102400}.$$

$$\therefore \left(99 \frac{319}{320} \right)^2 = \left(\frac{31999}{320} \right)^2 = \frac{31999 \times 31999}{320 \times 320} = \frac{1023936001}{102400} =$$

$$(9999 \frac{38401}{102400}) \text{ என்றே சூ. போலாம்.}$$

இதற்குச் சுருக்கமாகப் பெருக்குகிற வகை :—

கூகை சூ சூ சூ ரி வது $(99 \frac{319}{320})$ ரு (க்கு) மேலே—வது $(\frac{1}{320})$ முந்திரி கூட்டா (100). மத்த ய-கூகை சூ சூ சூ ரி வது $(99 \frac{319}{320})$ க்கு மேலே—வது $(\frac{1}{320})$. கூட்டா (100). இதைத்தன்னில் மாற-ரா ரா = மது- $(100 \times 100 = 10000)$ இதில் களிவு-வது: வய = $(100 \times \frac{1}{320} = \frac{100}{320} = \frac{5}{16} = \frac{5}{16})$; மற்ற-வது வய = $(100 \times \frac{1}{320} = \frac{5}{16})$. ஆக இது $(\frac{5}{16})$ தள்ளி நீக்கி—கூகைகூகை வது = $9999 \frac{3}{8}$ ரு மேல்—வது ரு வது: கூுவது = $(\frac{1}{320} \times \frac{1}{320} = \frac{1}{102400})$ கீழ்முந்திரி கூட்ட துறை கூகைகூகை வது கூுவது $(9999 + \frac{3}{8} + \frac{1}{102400})$ = $(9999 \frac{38401}{102400})$ குழி யென்பது.—

இதை பாஸ்காசாகாரியாதிகளின் வழியின்படிக்கும் (12ம் பக்கம் 2ம் விவரப்படி) செய்ய $[(99 \frac{319}{320})^2 = (\frac{1023936001}{102400}) = 9999 \frac{38401}{102400}]$ க்குழி சூ. போல் வரும். விட்டேறு சுக்கமாக வந்தால் பெருக்குகிற வகைக்கு விபரம்:—

உயச சூநு- $(24 \frac{15}{16})$ ரு கூகை சூநு- $(39 \frac{15}{16})$ ரு குழி யெத்தனை ஏன்றல்.

உயச சூநு- $(24 \frac{15}{16})$ யுடனே மாகாணி (ய = $\frac{1}{16}$) கூட்ட உயு (25); மற்றய கூகை சூநு- $(39 \frac{15}{16})$ -ய $(\frac{1}{16})$ கூட்ட சய (40); உயு (25) ரு இனம் உயி $(2 \frac{1}{2})$ யென்று நிருத்தி-சய (40)ம் உயி $(2 \frac{1}{2})$ யும் மாற-ரா (100); இதை-ய (10)ல் படுத்த-சு (= 1000); யிதில் களிவு.—உயு (25) ரு-ய $(\frac{1}{16})$ -க இ ய $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1 \frac{9}{16})$; சய (40) ரு-ய $(\frac{1}{16})$ -உயி $(2 \frac{1}{2})$ ஆச ய $(4 \frac{1}{16})$ தள்ளி நீக்கி கூகையு சூநு- $(995 \frac{15}{16})$ ரு யிதவுடனே—ய ரு ய $(\frac{1}{16} \times \frac{1}{16})$ வது கூுவ $(\frac{1}{256})$ ம் கூட்டி துறை—கூகையு சூநு-வது கூுவ $(995 + \frac{15}{256} = 995 \frac{241}{256})$ குழி யென்பது.

மற்றும் வந்தன வெல்லாம் இப்படிப்பார்த்துச் சொல்லவும்.

இப்பால் குளியளந்து கோலெடுக்குரதுக் குள்ளாக நிலம் சொல்லு கிரதற்கு பந்துக் கட்டு. (விபரம். ரண்டு)

- (1) உய ரு ய: க = $(16 \times \frac{1}{16} = 1)$;
- (2) உய ரு ய: சூநு = $(15 \times \frac{1}{16} = \frac{15}{16})$;
- (3) உய ரு ய: சூவு = $(14 \times \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8})$;

- (4) ஸுருய: னய = $(13 \times \frac{1}{16} = \frac{13}{16})$;
 (5) ஸுருய: ன = $(12 \times \frac{1}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4})$;
 (6) ஸுருய: இஸ் = $(11 \times \frac{1}{16} = \frac{11}{16})$;
 (7) ஸுருய: இபு = $(10 \times \frac{1}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8})$;
 (8) சுருய: இய = $(9 \times \frac{1}{16} = \frac{9}{16})$;
 (9) அருய: இ = $(8 \times \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2})$;
 (10) எருய: வஸ் = $(7 \times \frac{1}{16} = \frac{7}{16})$;
 (11) சுருய: வபு = $(6 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8})$;
 (12) ஸுருய: வப = $(5 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{16})$;
 (13) சுருய: வ = $(4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = \frac{4}{16})$;
 (14) ஸுருய: ஸ = $(3 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{16})$;
 (15) உருய: ப = $(2 \times \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8})$;
 (16) சுருய:—(ய) = $(1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16})$;

யென்பது. (ஸிபரம் மூன்று)

சுரு, ஆவது-ப-ஆவை னாய-ரு, ஆவது-சுருவத-னு-ரு, ஆவது, சுரு-
 னய-ரு, ஆவது-சுருவத-னு-ரு, ஆவது, சுரு-இஸ்-ரு, ஆவது, சுருவத - இபு-ரு,
 ஆவது, சுரு-இபு-ரு, ஆவது, சுருவத-இ-ரு, ஆவது-சு-வஸ்-ரு, - ஆவது, - ருருவத -
 வபு-ரு, - ஆவது ருரு வபு-ரு, ஆவது ருருவத-ரு, -வ-ஆவது-ரு-ஸ-ரு, ஆவது, ருருவத-
 ப-ரு, ஆவது, ரு-ய-ரு, ஆவது-வத யென்பது.

குறிப்பு:—இதன் ஸாராம்சம் யாதெனில்:—ஒன்றுக்கு ஒருமா $(1 = \frac{1}{16})$
 ஆகையால் னெ $\frac{15}{16}, \frac{7}{8}, \frac{13}{16}, \frac{3}{4}, \frac{11}{16}, \frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{1}{2}, \frac{7}{16}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ முதலிய
 பின்னங்கட்கு மா(ப = $\frac{1}{16}$) எவ்வளவு என்று பார்க்கும் திறைறுசிக்
 கணிதமேயாகும். என்பது தமிழ் லக்கத்தில் மேலே சொன்னபடிக்காகும்.

இந்த முன்று வகைத் தானமும் நன்றும் மனப்பாடம் பண்ணிக் கொண்
 டால் கோவளவு நிலவளித் குழி (ஸிஸ்தாசம்) விஸ்தீர்ணம். யெல்லாம்
 சுருக்கமாகச் சொல்லலாம்— இதை விரித்துக் காட்டல்:—

கூ (கீழ்மேல்) ச (4) ரு தென்யீ (தென் வடல்) ச (4) ரு நிலம் யெத்தனை
 யென்றால்:— ச-ய. வ $(4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4})$ மத்த-ச-ய: வ $(4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4})$. வரு வரு
 $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4})$ மாற வ-ருவ: ய $(\frac{1}{16})$ க்கு ஆவது - வத-ஆதலால் கூ ச ரு
 தென்யீ ச ரு-வத-(முந்திரி) என்பது.

கூ அ (8) ரு தென்யீ அ (8) ரு குழியெத்தனை யென்றால்:—

அ ய: இ $(8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2})$ மத்த அ-ய: இ. $(8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2})$ ∴ இ ரு இ
 $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = வ (\frac{1}{4})$; ஆதலால் அரு அரு—ஐ. யோல் ரு $(= \frac{1}{8})$ என்பது.

கூ ஸு (12) ரு தென்யீ ஸு (12) ரு குழி யெத்தனை யென்றால்—ஸு-ய:
 ன $(12 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{4})$ மத்த-ஸு ய: ன $(12 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{4})$ ∴ ன ரு ன: இ ய
 $(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}) = இய ஆவது-சு வத $(\frac{1}{16} + \frac{1}{24}) = (\frac{9}{24})$ என்பது.—$

நிசு ரு நிசு ரு (16 × 16) நிலம் யெத்தனை யென்றால்—நிசு ரு ய: ச
(16 × $\frac{1}{16}$ = 1); மத்த நிசு ரு ய: க (16 × $\frac{1}{16}$ = 1) ∴ கரு கரு (1 × 1)
மாற க ஆவது (1 ஆவது)-ப (= $\frac{1}{2}$ = ஒருமா) ஆதலால் நிசு ரு நிசு ரு-ப =
($\frac{1}{2}$ = மா = ஒருமா) என்பது.

நுட (32) ரு நுட (32) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்—நுட ரு ய: உ
(32 × $\frac{1}{16}$ = 2) மத்த—நுட ரு ய: உ (32 × $\frac{1}{16}$ = 2) ∴ உரு உரு (2 × 2)
மாற-ச-(4) நாலாவது-ச (4) (நாலுமா = சப) என்பது.

இப்படிச் சரி லக்கமாக வந்தால் இப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும். இனி
விட்டிரு லக்கமாக யேறுவதை வந்தால் மாறிச் சொல்லுகிற வகை:—

கிள் மேல்—உரிச (24) ரு தென் வடல்-சுரிச (64) ரு நிலம் யெத்தனை
யென்றால்:— உரிச (24)யும்-ய ($\frac{1}{16}$)ல் தாக்க-கஇ ($1\frac{1}{2}$). சுரிச (64)யும்-ய ($\frac{1}{16}$)ல்
தாக்க-ச (4) என்று வைத்து:— க இ ரு ச ($1\frac{1}{2}$ × 4 ரு) மாற—ச (6):—
ச-ஆவது சு (6) ப (ஆலுமா) என்பது.

சயி (48) ரு-அரி (80) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்—சயி ரு-ய-தாக்க
நு = (48 × $\frac{1}{16}$ = 3); அரி (80)யும் ய ($\frac{1}{16}$)ல் தாக்க-ரு (5); நு ரு ரு மாற
(5 × 3 = 15) = ரு (15) (பதினஞ்சுமா) ∴ சயி ரு அரி ரு (நில) யிரு
(15) ப (மா) என்பது. இப்படி யேறு வகையாக வந்தால் ப = (மா)
பார்த்துச் சொல்லவும்:—

யேறுவதை தப்பாகவந்தால் ஒரு துகையை—ய = ($\frac{1}{16}$)யில் களித்து அதை
மத்த ஒரு துகையுடனே மாறி திரும்ப வது (முந்திரியாயில்) யில் களித்து நிலம்
சொல்லுகிற வகை:—

கி (4) ச ரு தென்மீ-ய (10) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்-ச (4)யும்
(ய = $\frac{1}{16}$) வாயில் தாக்க — வ ($\frac{1}{4}$). இதனை — ய (10)ல் மாற — உஇ ($2\frac{1}{2}$)
இதனை-வது ($\frac{1}{2}$)யில் களிக்க-நி கி இ = ($\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{16}$ = $\frac{2}{16}$ = $\frac{1}{8}$)
யென்பது.

அ (8) ரு-உயிரு (25) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்-அ: ய: இ (8 × $\frac{1}{16}$ = $\frac{1}{2}$)
இதை உயிரு (25)ல் மாற — உஇ ($12\frac{1}{2}$). இதை-வது ($\frac{1}{2}$)யில் களிக்க — சுகிஇ
($\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{8}$ + $\frac{1}{8}$) யென்பது.

சயி (40) ரு சுயி (90) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்—சயி (40)யும்-ய ($\frac{1}{16}$)ல்
தாக்க-உஇ ($2\frac{1}{2}$), இதுவுடனே-சுயி (90)யை மாற-உயிரு (225), இதை
வது ($\frac{1}{2}$)யில் களிக்க—[இடி யறு = அறையேரிக்காலே பாகாணி (கால்வீயம்)
காணி முந்திரி] ($\frac{225}{8}$ = $\frac{45}{4}$) யென்பது.

நயிஉ (32) ரும-சயிடு இஓ (45 $\frac{5}{8}$) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்:—
 நயிஉ (32)ஐ - ய ($\frac{1}{16}$)ல் தாக்க - உ (2). இதுவுடனே—சயிடுஇஓ (45 $\frac{5}{8}$)ஐ
 மாற - சுயிக வ (91 $\frac{1}{4}$) இதை வது ($\frac{1}{8}$)யில் கழிக்க - ருடா. சுயிவதுக் ஈ.
 [அதாவது - (5 மா + $\frac{4}{6}$ மா) = (5 $\frac{4}{6}$ மா) நிலம்] என்பது

கீழ்மேல் தென்வடல் ரொண்டும் மாபின் துக்கை குழி-அதை-ய = ($\frac{1}{16}$)யில்
 தாக்க - கரு. அதை-வது-யில் களி(ழி)த்தால் கண்டது சொல்லவும்.

இதில் க-க-ரு ஆயிறம் கண்டால் ஆயிறமும் வது-யில் களிக்க நூ
 [($\frac{1}{320} \times 1000 = 3\frac{1}{8}$) = ($\frac{25}{8}$)]. இதை க (1) ரு இருவது மாவல்லோ
 (மாவல்லவா). அந்த-ப-உயி (20)ல் பெருக்க-சுயிஉஇ (62 $\frac{1}{2}$). இதனை திரும்
 பவும்—மா—படுத்த—சுயிஉடா—சு.—(சு = அறைமா) யென்று சொல்லவும்.

கனத்தை சில்வானப் படுத்தவும், சில்வானத்தை கனப்படுத்தவும் வகை.

யடாசு (பன்னிரண்டு தூறியிரத்துக்கு) ரு-நசுளாருயி (3750) குடுக்க
 வென்றால் எண்கவடி யன்றி யேது. கயிலேசரி சொல்லும் வகை.

மகாமேருவாகிய - யடாசு (பன்னிரண்டு கனம் = 1200000) இதை
 சில்வானப்படுத்த.

யடாசு = (1200000) = (12 லக்ஷம்)

நாடசு = (120000) = (லக்ஷத்திவதாயிரம்)

யடசு = (12000) = (பனிரண்டாயிரம்)

சுடா = (1200) = (ஆயிறத்திருநூறு)

நாடய = (120) = (நூத்திருபத்து)

யட = (12) = (பன்னிரண்டு)

என்று ஆருஸ்தானம் கொண்டு நிருத்தி பத்தியா—நசுளாருயி = (3750)யும்
 அந்தப் படியே ஆருஸ்தானத்திலே (இப்படி).

நசுளாருயி = 3750

நாடாரு = 375

நயிஎஇ = 37 $\frac{1}{2}$ = 37.5

நடா = 3 $\frac{3}{4}$ = 3.75

வடா = $\frac{3}{8}$ = 0.375

சு (முக்காணி) = $\frac{3}{80}$ = 0.0375

நிருத்தி—என்று வைத்து—முன்னிருத்தின பேருக்கு—சு ($\frac{3}{80}$) ஈய (கொடுக்க)

ய-யவது-கி-உவது-யி-ஆ-சு-ஆதலால்-யடாசு-பேருக்கு-நசுளாருயி
 குடுக்க ஈயவு வது முந்திரி ($\frac{3750}{1200000} = \frac{1}{320} =$ வது) என் தாம்.

மற்றும் வந்தன வெல்லா மிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.

குள வெட்டளவு வருமாறு:—

கீள் மேல்-ச (4) ரு தென் மடல்-ச (4) ரு மட்டு-கரு-மட்டு-யெத்தனை யென்றால்:—ச ரு ச ரு (4×4) மாற-யிசு (16) இதில் மட்டு-க (1)ல் களிக்க-ய-க:யி — சு-க:சு— ஆக — யிசு = $[(10 \times 1 = 10) + (6 \times 1 = 6) = (16)]$ இதனை-ய ($\frac{1}{16}$)யில் — யி.ய. இழு — சு:ய: வழு = $[(10 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{8}) + (6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}) = (1)]$ ஆக மட்டு க-இப்படிச் சொல்லுகிற வகையைச் சுருக் சமாகச் சொல்லுகிறதற்கு விபரம்:—

கீழ் மேல் ச (4) ரு தென்மீ-ச (4) ரு மட்டு-க (1) ரு-மட்டு எத்தனை யென்றால்:—ச (1) ஐ — ய ($\frac{1}{16}$)யில் களிக்க:— ச:ய: வ ($4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$), மற்ற-(4)யும் மட்டில் களிக்க-ச:க: ச = ($4 \times 1 = 4$) இதனுடனே முன்னிருத்தின — வ ($\frac{1}{4}$) மாற-ச:வ: க-($4 \times \frac{1}{4} = 1$); ஆதலால் கீ-ச ரு தென்மீ ச ரு மட்டு-க-ரு ($4 \times 4 \times 1$)க்கு மட்டு க (1) யென்பது.

கீ-அ (8) ரு தென்மீ-யிடு (15) ரு மட்டு-ஜ ($\frac{3}{4} = 0.75$) ரு-மட்டு-யெத்தனை யென்றால்:—கீள் மேல் (8) அ-யும் மட்டு ஜ ($\frac{3}{4}$)லில் களிக்க-அ:ஜ: சு = ($8 \times \frac{3}{4} = 6$) இதனை-ய ($\frac{1}{16}$)யில் களிக்க — சு:ய: வழு ($6 \times \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$) பென்று வைத்து, தென் வடல் — யிடு (15)டனே மாற யி:வ: உஇ = ($10 \times \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$); யி:வ: கவ = ($10 \times \frac{1}{8} = 1\frac{1}{4}$); ரு:வ: கவ = ($5 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$); ரு:வ: இழு = ($5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$) ஆக ரு இழு = ($5\frac{5}{8}$). ஆதலால் கீ-அ-ரு தென் மடல் யிடு ரு மட்டு ஜ ரு-மட்டு ருஇழு ($5\frac{5}{8}$) யென்பது.

கீள் மேல் உயிச (24) க்கு தென்மடல்-(32) நயிஉ-ரு-மட்டு-இழு ($\frac{5}{8}$) ரு மட்டு எத்தனை யென்றால்:—தென் மடல்-நயிஉ (32)ம் மட்டு-இழு ($\frac{5}{8}$)லும் மாற:— நயி:இ: யிடு ($30 \times \frac{1}{2} = 15$); உ:இ: க ($2 \times \frac{1}{2} = 1$), நயி:வ: ந ஜ ($30 \times \frac{1}{8} = 3\frac{3}{4}$), உ:வ: வ ($2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$) ஆக-உயி (20) என்று வைத்து-உயிச (24)யும் — ய ($\frac{1}{16}$)யில் மாற — உயி-ய: க வ ($20 \times \frac{1}{16} = 1\frac{1}{4}$), ச:ய: வ ($4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$) ஆக இ ($1\frac{1}{2}$) இதனுடனே முன்னிருத்தின-உயி (20)யு மாற-உயி:க-உயி; உயி:இ: யி; ஆக நயி = ($20 \times 1\frac{1}{2} = 30$); ஆதலால் கீ-உயிச ரு-தென்மீ-நயிஉ-ரு மட்டு-இழு ரு மட்டு நயி-நயி (30) யென்பது.

மத்தும் இப்படி வந்த இனத்துக் கெல்லாம் ஒருகை கோலை-மாகாணி (ய = $\frac{1}{16}$)யில் களித்து, ஒருகை கோலை-மட்டில் களித்து ஒன்றொன்று (ஒன்றுக் கொன்று) பெருக்கிச் சொல்வது.

பின்னையும் ஒருவகை:—

ஒருகை கோலை மாகாணி (ய = $\frac{1}{16}$)யில் கழித்து ஒருகை கோலுடனே பெருக்கி மட்டில் களித்துச் சொல்வது.

இதில் விரித்துக் காட்டல்:—

சு-சுயச (64)ரு தென்மீ-உயி இ (27½)ரு-மட்டு-வ (¼)ரு மட்டு எத்தனை யென்றால்:—

சுயச (64)யும் - ய - யில் கழிக்க - ச (4). இதனை தென்மடல்:— உயிஇ (27½)யுடனே மாற:—உயி:ச: அய-எ:ச: உயஅ-ச:இ: உ (27½ × 4 = 110) ஆ-ய-மட்டு-வ (¼)வில் களிக்க - ஈ:வ: உயரு - ஈ:வ: உஇ ஆ உயிஇ (110 × ¼ = 27½) ஆதலால் கீள் மேல்-சுயச-ரு தென்மடல் உயிஇ ரு மட்டு-வ-ரு மொத்த மட்டு உயிஇ (27½) என்பது. மறுபடி வந்ததெல்லாம் யிப்படிச் சுணக்குச் சொல்லவும்.

விருத்தம்:—

ஆதியொன்று முதலன்பதின் வரை—

சேதி யாந்துகை செப்பிடில்; பத்தஞ்சை—

பாதி செய்தறைப் பங்குடன் கூட்டி முன்

னீதியானது ரெற்றினச் சுருக்கமே (4)

படி யடித் துகை யாதென்றால்:—

ஒன்று முதல் ஐ (பத்து) மட்டும் நடத்த வருகிற துகை யெத்தனை யென்றால் (அகாவது ஒன்று முதல் பத்துவரையில் கூட்டிய துகை = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = ? = என்னவென்றால்):— பத்துடனே ஒன்று கூட்ட-யக (11) இதில் பாதி ருஇ (5½) முதலான பத்துடனே பெருக்க துகை-ருயரு = (1+2+3+4+5 +6+7+8+9+10 = $\frac{10 \times 11}{2} = 5 \times 11 = 55$). ஆதலால் ஒன்று முதல்-ய-(10) மட்டுத் துகை ருயரு (55) என்பது, (1) —

ஒன்று முதல் ஐாறு மட்டுத் துகை யெத்தனை யென்றால்:— நூறுடன் — க (1) கூட்டாக (101). இதில் பாதி (50½) = ருயரு; இதனை ஈ (100) உடனே மாற-ருசுருய (5050) = (1+2+3+..... + 100. மட்டும்) கூட்டிய துகை = $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$ ∴ ஆதலால் நூறு மட்டும் துகை-ருசுருய (5050) என்பது. மத்தும் வந்தால் வெல்லாம் இப்படிப் பார்த்துச் சொல்வதுன்ன முதலிலே மேல்-(ச)-கூட்டிக் கண்டதில் பாதியும் முதலும் மாறக் கண்டது துகை யென்று சொல்லவும்.

(இதன் ஸம்பந்தமான இன்னுஞ்சில விசேஷங்களை முன்னுறையில் பார்க்கலாம்):—

எ(ண்)ஞ் சுவடி அலகு நிலை வருமாறு:—

ஓதிவாயி லொருவாய்த் துகை தனை—

ஆறினால் மாறி அமந்திருந்த வப்பொருளை—

அஞ்சினாலாய பயன்களை யத்தென்று—

(மே)மது-ஞ்சாத லகு நிலை சொல் (5) —

இதனை விறித்துக் காட்டல்:—

வாய்முதல்-அ-உா-(100-200) மட்டுந் துகை யெத்தனை யென்றால்:— அா (200)யும் கூ (6)ல் பெருக்க-அா'க: கூ அா (20) $\times 6 = 1200$ என்று வைத்து அதில் - ரு:உ: யெ = $(5 \times 2 = 10)$ தள்ளி நீற-நூகய (1190), என்பது.

-வது-வாய்க்கு-க'வதுவது - முதல் கூ(வது): கூபு = $(\frac{1}{3 \times 2} - \text{வாய்க்கு} - 1 \times \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{3 \times 2}$ முதல் $1000 \times \frac{1}{3 \times 2} = 3\frac{1}{3}$) மட்டுந் துகை யெத்தனை யென்றால்:—

கூபு ($3\frac{1}{3}$)ஐ ஆமில் மாற-கூ'க: யெ: கூ'பு: கூ - ஆ யெது = $(6 \times 3\frac{1}{3} = 18\frac{2}{3} = 18.75)$ இதில் உவது-தள்ளி நீக்க-யெது சயச ரிவது = $(18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = 18\frac{235}{42} = 18\frac{47}{84})$ \therefore ஆகலால் வது ($\frac{1}{3 \times 2}$). வாய்க்கு அலகு நிலை யெது இ சயச ரிவது (= $18\frac{47}{84}$) என்பது; மத்தும் வந்தன வெல்லாம் இப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.

இனிமேல் விசேஷமாக குறுக்கே முறிச்சுக் கேட்டால் சொல்லுகிறவகை விபரம்.

விருத்தம்:—

சொல்லிய எண்கவடி வாயளதோறும்—

துகை முறிச்சுத்தான் கேழ்க்கச் சொல்லக் கேளீர்;

வல்லவர்கள் சொன்ன வெக்கம் தனைத்தானத்தில்,

வாகாக நிறுத்தி பெற்றினச் சுருக்கந்தாக்கும்,

நல்லதுகை மேற்றான நடத்திக் கூட்டி நவின்னுவரும்—

வாயள தன்னில் நாட்டு வீராய்,

ல(வ)ல்லூரர் திரைந்து மட்டுந்தான்—

ஆமீரன்கிக் கப்பாலே முழு(ன்)றகுந் தானே=(6).

இதை விறித்துக் காட்டல்:—

க'ரு:ரு ($1 \times 5 = 5$) முதல். அய:ரு: சா (= $80 \times 5 = 400$) வறைக்குந் துகை யெத்தனை யென்றால்:—

அய (80)ரு. இனம் - அ (8) என்று வைத்து - அ (8) மட்டும் மாறினச் சுருக்கம் படியடித்து கை - கூயக ($\frac{8 \times 9}{2} = 36$). இதை ரண்டுத்தானம் நடத்த - கூயக - கூாகய = $(36 - 360)$ இதை முன் துகை கூயக (36)க் கூட்ட முன்னாத்தித் தொண்ணாத்தாறு (கூாகயக = 396). இதை யிந்த வாயாகிய ரு (5)ல் மாற கூா'ரு: கூ'ரு: கூ'ரு: சாருய:ரு:க: கூய - ஆ கூகாஅய (= $396 \times 5 = 1980$). ஆகலால் - க'ரு: ரு-முதல்-அய:ரு: சா-வரைக்கும் துகை - கூகாஅய (1980) என்பது. இந்தப்படி முதல் வாய் முதல் பத்து வாய் மட்டும் பார்த்துச் சொல்வது.

அப்பால்-ஒது-வாய்முதல் தூணி வாய் மட்டுக்குந் தானம் வருமாறு:—

கரி: றி ($1 \times \frac{1}{160} = \frac{1}{160}$) முதல் ஞாறி: ஈழு ($500 \times \frac{1}{160} = 3\frac{1}{8}$) மட்டுந் துகை யெத்தனை யென்றால்:—

ஞா (500) ற இனம் று (= 5) என்றறிந்து-று (5) மட்டும்மாரிச் சுருக்கத் துகை கூட்ட (வந்த) சுருக்கத் துகை (படியடிப்படி) — று = $\left(\frac{5 \times 6}{2} = 5 \times 3 = 15\right)$ இதனை ஞா-யும்-று ஆக நிருத்தினஸ்தானம் (ஈ = 3) மட்டும் நடத்த — று — றாறு — ஈஞா — ஆக கூட்டின துகை — ஈகாசுயு (1665) இதனை பிறந்தவாகிய-றி- $\left(\frac{1}{160}\right)$ —வாயில் கழிக்க—ஈறி: சுவ; ஞாறி: ஈது; சுயி: றி: வழு, றுறி: சுரி-ஆக—யவ றி = $(1665 \times \frac{1}{160} = 10 + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{160} = 10\frac{13}{32})$. ஆதலால் — கரி: முதல் — ஞாறி: ஈழு — மட்டுந் துகை = யவ றி ($10\frac{13}{32}$) என்பது.

மத்தும் வந்தனவெல்லாம் இப்படிக்கண்டு சொல்லவும்:—

ஒது ($\frac{1}{320}$) முத்திரி வாய் முதல்-ய ($\frac{1}{16}$) மாகாணி (வீசம்) வாய் மட்டும்—சா (400) வறைக்குந் துகை யெத்தனை யென்றால்:—

சா (400) ற இனம் = ச (4) என்று வைத்துக் கொண்டு — ச (4) வறைக்கும் படியடித்துகை கூட்ட $\left(\frac{4 \times 5}{2} = 10\right)$ = றி. இதனை மூன்றும்ட்டும் நடத்த-ய = (10) — றா = (100) — ஈ = (1000). ஆக

ஈய = (1110) என்று கண்டு — பிறந்தவாயாகிய — ஒது — வாய்முதல் — ய — வறைக்குந் துகை கூட்ட — ஒது — றி — று — சு — சுறு — ப — ய = றி சுறு றிஒது = $(\frac{1}{320} + \frac{1}{160} + \frac{1}{80} + \frac{1}{10} + \frac{3}{80} + \frac{1}{20} + \frac{1}{16} = \frac{3}{20} + \frac{3}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = \frac{63}{320})$ இதனுடனே முன்னிருத்தின — ஈய (1110) ம் மாற — ஈறி: றாறு (1000 $\times \frac{3}{20} = \frac{3000}{20} = 150$); றாறி: று (100 $\times \frac{3}{20} = 15$); றி: கடி (10 $\times \frac{3}{20} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$) ஈசு: ஈயி (1000 $\times \frac{3}{80} = 37\frac{1}{2}$); றாசு: ஈது = $(100 \times \frac{3}{80} = 3\frac{3}{4})$; — றி: வழு (10 $\times \frac{3}{80} = \frac{3}{8}$); = ஈறி: சுவ, றாறி: இழு; றி: ய = $(1000 \times \frac{1}{160} = 6\frac{1}{4}, 100 \times \frac{1}{160} = \frac{5}{8}, 10 \times \frac{1}{160} = \frac{1}{16})$; ஈஒது: ஈழு, றாஒது: வய, றிஒது: கி $(1000 \times \frac{1}{320} = 3\frac{1}{8}, 100 \times \frac{1}{320} + \frac{5}{16} = 10 \times \frac{1}{320} = \frac{1}{32})$ ஆக — ஈயிஅ இ சு றி = $(218 + \frac{1}{2} + \frac{1}{40} + \frac{1}{160} = + \frac{85}{160} = + \frac{17}{32})$ ஆதலால் — ஒது — வாய் முதல் — ய — வாய் மட்டும் — சா — வறைக்குந் துகை — ஈயிஅஇசுறி (218 $\frac{17}{32}$) என்பது.

மத்தும் வந்தன வெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.

பெருங்குளி(ழி) மாத்துக்குத் துகை வருமாறு :—

விருத்தம் :—

புரிந்த பெருங்கு(ழி)னி மாற்றின் துகைதானின்னு

(அ),(ம்); புலவொறை ஒன்று முதலீரைந்தாக வருந்துகைதானீர்

தெரிய வல்லீராகில்; வருத்திய(அ)ரைதனில்

(பா)மா, மிவைத்திரை—அதிலத்திருந்தவே

நடுக்கட்டி சீனந்துகையால் தாக்க(ச்)

செப்பியவை ரண்டுக்கு மந்திரமாய் நாளும்,

இருந்தபடியடி கூட்டி மூவர்க்கீயந்து—

இன்னதென்று வருங்குளி(ழி) வாயுமியம் புவீரே(7);

இதை வியித்துக் காட்டல் :—

கரு'க - க - குழி ($1 \times 1 = 1$ குழி) முதல் - மறுய - குழி ம'ய: ன
($10 \times 10 = 100$) வறைக்கும் துகை யெத்தனை யென்றால்:—

-ம'ஐ-தன்னில்மாற-மா-($10 \times 10 = 100$) என்று நிருத்தி - ம - உடனே - க-
கூட்ட-மக ($10 + 1 = 11$) - இதனை முன்னிருத்தின-மா-உடனேமாற-
சூா ($100 \times 11 = 1100$) என்று வைத்து இதுடனே-ம=(10) வறைக்கும்
படியடித் துகை நுயிரு (55) கூட்ட-சூாநுயிரு (1155) இதனை-ந. (3)ருக்
குடுக்க ஈய்வு - நூஅயிரு = (385) = ($1\frac{1}{3}55$). ஆதலால் - மறுய - குழி
நூஅயிரு (385) என்பது :—

க (1) முதல் உயிரு (25) வறைக்கும் துகை எத்தனை யென்றால் :— உயிரு (25)யுந்
தன்னால்மாற - சூாஉயிரு ($625 = 25 \times 25$); என்று நிருத்தி-உயிரு (25)
உடனே-க-(1) கூட்ட - உயிசு (26). இதனை முன்னிருத்தின - சூாஉயிரு
(625)ல் மாற-சூா உயி: மஉசு ($600 \times 20 = 12000$); சூா'சு: நூசூா
($600 \times 6 = 3600$); உயிசு உயி: சூா ($20 \times 20 = 400$); - உயி'சு: னஉயி
($20 \times 6 = 120$); உயி'ரு: ன ($20 \times 5 = 100$); சு'(ரு): நூ ($6 \times 5 = 30$);
ஆ - மசூசூஉருயி (16250); யி.துடனே - உயிரு (25) வறைக்கும் படியடித்
துகை கூட்ட - (வருவது) மசூசூருளயிரு [$(16575) = (25 \times 26 \times \frac{1}{2})$
 $= 325; + 16250$]. இதனை-ந-(3)ருக் குடுக்க ஈய்வு. நூசூாஉயிரு =
[$(16575 \times \frac{1}{3}) = (5525)$] என்பது.

மத்தும் வந்தன வெல்லா மிப்படிக் கண்டு கொள்வது.

(வேறு)

முத்துகை வினா வருமாறு :—

விருத்தம் :—

பன்னிண்டு படி நெல் முக்கால்பணமென்ன

வெண்கலமெத்தனைப் பொன் நென்னில்

அது தன்னதாய் நடுவுக்கடையுந் தாக்கியே

முன்னமீயந்து மொளியுங் கணக்கிதே “(8)” என்பது :—

நெல் படி-யிட (12)க்கு விலை பணம்—தூ ($\frac{3}{4}$)ல் ஆக — அள (8) கலத்துக்குற (பணம்) எத்தனை யென்றால் :—

அள மும் (8கலமும்) னுளிப் படுத்த - ளாடய (720) இதை நடுவாகிய-தூ ($\frac{3}{4}$)—வில்—மாற னாசய (540) இதை முதலாகிய-யிட (12)ற்குக் குடுக்க ஈயவு—சயடு (45).

ஆதலால் :— படி-யிட (12)ற விலை ப — (பணம்), தூ ($\frac{3}{4}$)ல் ஆக—அள (8 கலத்து)ற — சயடு (45) பண மென்பது.

மத்தும் வந்தன வெல்லாமிப்படிக் கண்டு சொல்வது :—

இதில் மத்து மோர் இனம் வருபாறு :—

முதலுவ் கடையும் பெருக்கி நடுவுக்குக்குநிறுவகை :—

விரித்துக்காட்டல :—

விருத்தம் :—

ஆறறை பணத்துக்கு அறுநூறு தான்தேறு

காகிரண்டாயிறத் . தெட்டறைக்காகவே

விலைமுன்கண்டு கொண்டு தான்

மாறியே நடுவாக விள(க்)குவிர் ———— (9) என்பது—

சுஇ ($6\frac{1}{2}$) ப — (பண)ற—சுள (600) கூ ஆக உச்சுஅஇ ($2008\frac{1}{2}$)ற செ எத்தனை யென்றால் :—

முதலாகிய ($6\frac{1}{2}$) சு இ — யும் கடைமாகிய - (உச்சுஅஇ) இரண்டாயிறத் தெட்டறை ($2008\frac{1}{2}$)யும் பெருக்க - யெடுத்துயடு வ ($1305\frac{1}{4}$) இதை நடுவாகிய—சுள (600)க்கீய ஈயவு :—

$$\begin{aligned} \text{உயக தூ ரி கூ தூப} &= [(21 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{160} + \frac{1}{1280} + \frac{1}{6400}) = \\ &= (21 + \frac{3}{4} + \frac{1}{160}) + (\frac{1}{6400} = \frac{1}{160}) = (21 + \frac{3}{4} + \frac{1}{160} + \frac{1}{160} = \\ &= (21\frac{3}{4}) + (\frac{40 + 16 = 56}{6400}) = (21\frac{3}{4} + \frac{7}{800}) = (21\frac{607}{800})]. \text{ஆதலால் :—} \end{aligned}$$

சு இ ($6\frac{1}{2}$) ப — ற கூ சுள (600) ஆக உச்சுஅஇ ($2008\frac{1}{2}$) ற—உயக தூர(யும்) கூ தூப = ($21\frac{607}{800}$) என்பது.

(இந்த மாதிமியையே இன்னும் நின்னத்தில்) :—

தூநு ($\frac{1}{16}$) பேருக்கு—நய (30) ஆக :— சூஅறயஅ (1818)ற. யெத்தனை என்றால் :—

சூஅறயஅ (1818)யும் தூநு ($\frac{1}{16}$) (ஆல்) பெருக்க—சூளாகவடி (1704 $\frac{3}{8}$) இதை நடுவாகிய—நய (30)ற்குக் குடுக்க ஈய = நயசு தூய (= $56\frac{13}{16}$) என்பது

• மத்தும் வந்தன வெல்லாமிப்படிக் கண்டு சொல்லவும்.

(வேறு)

ஐந்துகை விகற்பம் வருமாறு:—

விருத்தம்:—

நால்குக்கு கொண்ட அடிக்கோலிலே-

நவீன குளி(ழி) நூறு, மறுன்கதாக

(அறுன்கதாக) வேறுகுக்கு

கோலதலை, குளி(தானென்னில்), யாதென்னில்
விரான முத்துகையைத் தன்னால் மாறி

யானுலே யதனுடனே நூறெத் தாக்கி.

அறிவுடையீர் கடைசியறுன்குதன்னை

தானு கு(ழி)ளிமாறி இதனுக்கு முன்-

தருத்துகையை தானியந்து சாற்று விரே (10)

என்பது:—

(16) யெசு-டிக்கோலால் குளி-நா (100)க்கு (24) உயெசு-டிக்கோலால் குழி
யெத்தனை யென்றால்:—யெசு (16)யுந் தன்னால் மாற - உாருசு ($256 = 16 \times 16$); இதை நா (100)ல்-பெருக்க-
உயெருசுசுா (25600). இதை நிருத்தி; கடைசியாகிய-உயெசு (24)யுந் தன்னால்
மாற-ருளாசு ($24^2 = 576$) இதற்கு முன்னிருத்தின-உயெருசுசுா (25600)யுந்
குடுக்க:—

(இதற்கு விபரம்):—

ருா-சய: உயெசு ($500 \times 40 = 20000$);எய-சய: உயெசு (70 \times 40 = 2800);சய சு: உாசய ($40 \times 6 = 240$);ருா-ச: உயெசு ($500 \times 4 = 2000$)-எய-ச: உாசய ($70 \times 4 = 280$)-சு-ச: உயெசு ($6 \times 4 = 24$)-ருா-வ: ஈஉயெரு ($500 \times \frac{1}{4} = 125$)-எய-வ: யெ இ ($70 \times \frac{1}{4} = 17\frac{1}{2}$)-சு-வ: க இ ($6 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$)-ருா-நி: எயெரு ($500 \times \frac{3}{20} = 75$)-எய-நி: யெ இ ($70 \times \frac{3}{20} = 10\frac{1}{2}$)-சு-நி: னுநி ($6 \times \frac{3}{20} = \frac{9}{10}$)-ருா-நி: ஈயெரு ($500 \times \frac{1}{160} = 3\frac{1}{8}$)-எய-நி: வயெரு ($70 \times \frac{1}{160} = \frac{7}{16}$)-சு-நி: சய ($6 \times \frac{1}{160} = \frac{3}{80}$)-ருா-வரு: கயெரு ($500 \times \frac{1}{320} = 1\frac{9}{16}$)-எய-வரு: கயெரு ($70 \times \frac{1}{320} = \frac{7}{32}$)-சு-வரு: வயெரு ($6 \times \frac{1}{320} = \frac{3}{160}$)-ஆ உயெருசுசுா (25600)ம் சரி-

(இவ்விரம் சொல்லும் வழி இவ்வளவு விஸ்தாரா மடைகின்றது.)

ஆதலால் சுயவு - (சமீப வநிபிஷத) என்பது ஆகையால் - மசு (16) அடிக் கோலால் குழி 11 (100) ரூ-உமச (24) டிக் கோலால் குழி - சமீப வநிபிஷத என்பது.

குறிப்பு:—இங்கே மேற் சொன்ன கணக்கில் விடை இருவிதமாகச் சொல்லப் பட்டிருக்கிறது. ஷே இரண்டு விடைக்கும் விவேகமகணிதத்தால் முன் குழி (100) என்பது வாவில்லை ஆனாலும் ஷே இருவித விடைகட்குப்பதிலாக (இக்கு - சமீப வநிபிஷத) என்று விடையைக் கொண்டால் ஷே இரு விடைகளைப்போல் அவ்வளவு பெரும் பிழையாக ஏற்படவில்லை - $(+ 12\frac{7}{80})$ இவ்வளவு தான் வித்யாசப் படுகின்றது. (கணிதப் பெருக்கால் பிரமையால் மூலப்பொது வழியிலும் இந்த [கூ = $\frac{3}{80}$] முக்காணி கணிதமும் விடப்பட்டது) என்பது உணர வேண்டியதவசியம்.

ஷே - சமீப வநிபிஷத - என்பதை சரிதான் என்று நிரூபிக்கல்:—
விவரணயிங்கு:—

மேலே கூறப்பட்ட விடைகள்

$$(1) \text{ சமீப வநிபிஷத} = (44 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 44\frac{131}{320});$$

$$(2) \text{ சமீப வநிபிஷத} = (44 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 44\frac{135}{320});$$

$$(3) \text{ சமீப வநிபிஷத} = (44 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 44\frac{137}{320});$$

இவ்விதமாகும்.

இனி இந்த மூன்றுவித விடைகளில் எது மிகவும் சமீபத்தில் சரியாகும் என்பதை நிச்சயிக்க விவேகம கணித விவரணம்-கீழ்.

$$\therefore (\frac{16}{24})^2 = \frac{256}{576} = \frac{4}{9} \therefore$$

$$(1) 44\frac{131}{320} \times \frac{9}{4} = 99\frac{1179}{1280}$$

$$(2) 44\frac{135}{320} \times \frac{9}{4} = 99\frac{1215}{1280}$$

$$(3) 44\frac{137}{320} \times \frac{9}{4} = 99\frac{1237}{1280}$$

என்றேற் படுவதால்:—

குழி - 100 -க்கு—

$$\text{முதல் விடை வித்தியாசம்} = (- \frac{101}{1280})$$

$$\text{இரண்டாம் விடை வித்தியாசம்} = (- \frac{65}{1280})$$

$$\text{மூன்றாம் விடை வித்தியாசம்} = (+ \frac{7}{1280})$$

இவ்விதம் போன்ற கணிதத்திற்கெல்லாம் மிகவும் குறைந்த சமீப வித்யாசத்தை எந்த விடை தருகிறதோ அதையே எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும் என்பது கணிதப் புலவர்களின் துணிவு. ஆகையால் இந்த விஷயத்தை மகான்கள் அவசியம் கவனிக்க வேண்டியது.

இவ்விஷயத்தில் பாஸ்கராசாரி யாதிகளின் ப்ரமாணவழி :—

தெரிந்தவைகள் :—

ஓர் கோல் = 16 அடி. மற்றொன்று = 24. நிலக்குழி விஸ்தீர்ணம் = 100ம்
16 அடிக்கோலுக்கு \therefore செ 100 குழி 24 அடிக்கோலுக்கெவ்வளவு என்பது
கேள்வியும் தெரிய வேண்டியதும். :—

$100 \times \left(\frac{16}{24}\right)^2 = 100 \times \frac{16 \times 16}{24 \times 24} = 100 \times \frac{256}{576} = 100 \times \frac{4}{9} =$
 $\frac{400}{9} = 44 \cdot 44 \cdot 44 = 44 \cdot 44 \cdot 44 \cdot 44 \dots$ என்பதற்கும் : ஆனாலும் இவ்வித
கணிதங்கள் எப்போதும் முடிவையே அடையாது (அதாவது மிச்சமின்றி யிராது)
ஆகையால் வேண்டிய வறையில் ருஷ மத்தைக் கணித்துத் தெரிந்துகொள்ள
வேண்டும்.

இவ்விதம் ஏன் கொள்ளவேண்டியதென்றால் (கூலு முதலிய) பின்னம்
என்பது இஷ்டம் போன்ற எல்லைக் குட்பட்டது. சேஷத்தாது கணிதங்களோ
இஷ்டத்தை மீறியதும் எல்லையற்றதும் என்பதும் உணரக்.

• மேலும் இ. குழி = $44 \cdot 44 \cdot 44 \cdot 44 - \dots$ என்பதின் = $44 \cdot 44 \cdot 44 \cdot 44 \cdot 1000000 \cdot 10000 \dots$
இந்த $\left(\frac{4444}{10000}\right)$ குழியை பூர்வீகர்களால் ஏற்படுத்திய கடைசியளவு (சாரர்) $\frac{1}{100}$
முந்தியில் பெருக்கிய = $\frac{4444}{10000} \times 320 = 142 \cdot 22$ ஆகையால் முன் சொன்னது
போல் குழி = $44 \cdot 44 \cdot 44 \cdot 44$. இதையும் முன் போல் விவோம கணிதம் செய்ய
 $44 \cdot 44 \cdot 44 \cdot 44 \times \frac{9}{4} = 9 \cdot 1280$. இங்கும் குழி 100க்கு $\left(\frac{-2}{1280} = \frac{-1}{640}\right)$ வித்யாசம்
வருவதைக் கவனிக்கவேணும்.

இவ்விதம் நேரும் இடமெல்லாம் யுக்தியால் இவ்விதம் ஊகித்துக் கொள்ள
வேண்டியதே முடிவாம்.—

இவ்வித வழிக்கு பாஸ்கராதிகளின் மூலஸூத்ரம் :— இம்மாதிரி கணி
தங்கட்குப் பொதுவாக :—

இங்கு தெரிந்தவை :—

• விசால (வர்க்க) மாகிய சேஷத்தாரும் (நிலப்பரப்பும்) விசாலத்தைத் தெரி
வித்த ஓர் கோலும், இதற்கே மற்றோர் விசாலத்தைத் தெரிவிக்க வேண்டிய
கோலும் ஆக மூன்று உருப்புகளாம்.

இரு கோல்களின் தெரிந்த அளவு தீர்க்க (தீண்ட) ரேசையிலும் கேந்திரமேர் விசாலத்திலுமாகும். ஆகையால் இங்கு இனம் சித்யாசடாக விசாலமும் வேகையுமாக, இரத்திரது. மேலே பெரிசெய்து, இரத்திரது கோல் நீளவாயும் விசாலமாக இவ்வுக்கே லும் கேந்திரமும் ஒரே இனமாகச் சேர்ந்தது ஆகின்றது. பிறகு :— “வர்க்கத்தினால் வர்க்கந்தைப் பெருக்கி வர்க்கத்தினால் வருத்த பலமும் வர்க்கமாம்” என்கிற ஸூத்ரப்படி :— குழி தெரிவித்த கேல் வர்க்கத்தைக் குழியால் பெருக்கி, குழி தெரிவிக்க வேண்டிய கோலினுடைய வர்க்கத்தால் வருத்த நிலை — இவ்வுட கோலாகிய வருத்த கோலுக்குறிய நிலப்பரப்பு (நிலத்துக்குறிய குழி) ஆகும். இந்த ஸூத்ரத்தையனுசரித்தே மேலே உதாரணத்தில் காட்டியபடி வந்த $= (100 \times \frac{1}{10}) = 100 \times \frac{256}{1000} = 44.4444...$ என்பது மற்றையபடி—(24)-ம் பக்கத்தில் காட்டிய ரீதியாகக் கணிப்பது காலத்தை வீணாக்குவதும்—மனக்குழப்பத்துக் சீடமுப்தான் ஆகின்றது.

மேலுமந்தவழி அதோடின்றி எதை எதை தென்தெற்குக் கொண்டு நிச்சயிப்பது என்ற சந்தேகமும் வேறு உண்டாகிறது.

பின்னும் ஒருவகை வெண்பா :—

கொண்ட வடியெட்டால் குளியுமொரு

நானாறு—கண்டகோல் குளிகாறுங்கால்,

கண்டதொரு யெட்டைசீனை மாரியியன்ற குளியிர்த்தாக்கி

தொட்ட குளிக்கியந்து சரிசொல்—(11) என்பது :—

ஸமீகரணம் :—

எட்டடிக் கோலால் குழி நானாறும், கண்டதொரு கோலாலளக்கக் குழி நூறு, அளந்த கேலுக்கடி யெத்தனை மென்றால் :—

அ (8) புந்தன்னால் மாற — சுயச (64) இடைசா (400)ல் பெருக்கக் குழி — உருநூலா (2560); இருத்தி இடைசாண்ட குழி (10) ரு குக்க சுயசு சரி குளிப்படுத்தியசுறுயசு குழி மறும. மா, மசு: சுய: — ஸசுய, சுய சுய-உய-உய-சுசு: நயசு = உருநூலா (2560க்கு வ. க. மூலம் = $(256)^{\frac{1}{2}} = 16$). ஆதலால்-அ (8) டிக் கோலால் குழி சாறு கண்ட தொரு கோலாலளக்கக் அளந்த குழி-ம-கோலுக்கடி — மசு (16) என்பது.

என்றால் :— திறைறுசுக் கணிதப்படிக்கு :—

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{கண்ட தொரு} \\ \text{கோலின் வர்க்கம்} \end{array} \right\} = \frac{(\text{எட்டடிக் கோல் வர்க்கம்}) \times (\text{நானாறு})}{(\text{நூறு})}$$

$$= \frac{(8)^2 (400)}{(100)} = \frac{64 \times 400}{100} = 256. \quad \text{இதன் வர்க்க மூலம்} = (256)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (16 \times 16)^{\frac{1}{2}} = 16. \quad \text{என்பதால் :—}$$

(தெரிய வேண்டிய கோவின் நீள வர்க்கம்)

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{(தெரிந்த கோல்} \\ \text{நீள வர்க்கம்)} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{(தெரிந்த கோலாலளந்த நிலக்குழி)} \\ \text{(தெரிய வேண்டிய கோலாலளந்த நிலக்குழி)} \end{array} \right\}$$

என்று ஸூத்ரம் இவ்விதம் பிறக்கிறது.

மற்றும் வந்தனவெல்லாம் இப்படிக்கண்டு சொல்வது.

விருத்தம்:—

பத்துடறாழிக் கோலால் குளியுமே நாப்பது தனக்குப்—

போனைய்ந்துந்து (பொன்னைந்து) நாலாறெத்த அடிக்கோல் குளி
(நூறுக்கு) ளாத் தானே ஓதவெனில்:—

முற் கோலைமாறி நேரேபெத்த (அடி)புடன் தாக்கி

முதலாய்க் கண்டு பின்னடியையும் குளியையுமப்படிப் பேசி—

முத்துகைக் கீய்ந்ததனில் வந்த ஈவை—

முன் (சொன்ன) வந்த போதனில் (பொன்ன,நால்)

தாக்கி மொழி)ளிகுவீரே [= (12)

என்பது— விரித்துக்காட்டல்:—

யசு (16) அடிக்கோலால் குளி சய (40) று,தீர்வை பொன் று (5) ப—ஆ—
உயச (24) அடிக்கோலால் குளி—ரா (100) க்கு தீர்வை எத்தனை யென்றால்:—

யசு (16) பு—ந் தன்னால் மாற குழி உாடுயசு (256) இதை—சய (40)ல் பெருக்க—
யசுஉாசய (10240) என்று நிருத்தி - உயச (24) யுந் தன்னால் 'மாற -
ருாஎயசு (576) இதை—ரா-(100)ல் மாறக் குழி—ருயசுசுா = (57600) -
முன்னிருத்தின - யசுஉாசய (10240) க்குக் குடுக்க:—

யசு. ரு : ருயசு = (10000 × 5 = 50000)

உா. ரு : சு = (200 × 5 = 1000)

சய. ரு : உா = (40 × 5 = 200)

(1)ம்

யசு. இ : சுசு = (10000 × $\frac{1}{2}$ = 5000)

உா. இ : ரா = (200 × $\frac{1}{2}$ = 100)

சய. இ : உய = (40 × $\frac{1}{2}$ = 20)

(2)ம்

யசு. பூ : சூஉாருய = (10000 × $\frac{1}{3}$ = 12500)

உா. பூ : உயரு = (200 × $\frac{1}{3}$ = 25)

சய. பூ : ரு = (40 × $\frac{1}{3}$ = 5)

(3)ம்

(1ம் + 2ம் + 3ம்) (சேர்க்க) ஆ ருயசுசுா (= 57600)ம்

சரி. ஒருவன் பேருக்கு = ரூஇருபது ($5 \frac{5}{8}$) இதை முன்னிறை (முத்தியோ) வந்த - ரூ (5) ம் பணமாக்க - ரூ (50) இதுவுடனே - ரூஇருபது ($5 \frac{5}{8}$) ஐ மாற-உராயுகவ ($281 \frac{1}{4}$) :— ஆதலால் - ஸூ (16) பக்ககாலால் குளி - சயி (40) ரூ (5) ப— ஆ—உஸ (24) ; க்கோலால் குளி (11 = 100)க்கு - உயுகவ ($281 \frac{1}{4}$) ப— என்பது : இதனால் :—

$$\left(\frac{24 \times 24 \times 100 \times 5 \times 10}{16 \times 16 \times 40} \right) = \left(\frac{7200 \times 5}{128} \right) = \left(\frac{3600}{128} = 281 \frac{1}{4} \right)$$

என்று விவிட ஏற்படுகின்றது.

விருத்தம் :—

திங்களொன்றுக் (கஞ்ஞாளிக்காலினாலே) கைக்காழிக் காலினாலே—
கெல் திருந்தவு முக்கலந் தனக்குச் சேவிப்போலும்—

சங்கையுடன் பதியாறு திவசம் பற்று (பத்து) தானே சேவிக்கு (மெண் ணளி) மெண்ணழிக் காலால் இங்கு வென்றால்

பேருவதுறை செய்ய வென்றால்—

இயன்றுமுதலுடனே கடைசியெட்டை மாற்றி—
அங்கதவுமுதல் நின்ற தனைத் தாக்க-அம்முதலுக்
கிபந்தே கலமா மனாகுயிரே (13) என்பது.—

நய (30) னாள் சேவித்தாலுக்கு (5) ரூ உகாலால் [(ரூ=5) உற்பரக்காலால்]
நள (3 கலம்) ஆ மீ—சூ (6) னாள் -- ல (11) சேவித்தாலுக்கு - அ உ
காலால் (8 உற்பரக்காலால்) யெத்தனை என்றால் :—

[முதலாகிய - (நய) ம் - கடைசியாகிய அ ($8 \frac{1}{2}$ மாற)] முதலாகிய முப்பதும்.
கடைசியாகிய எட்டும்தாற - நய. அ. உராயு = ($30 \times 8 = 240$) என்று
வைத்து இதனை முதலாக நிருத்தி நளமும்-மாக்கால்படுத்த - சயிடு (கலம்
 $3 \times 15 = 45$) இதனை ரூ உ ($5 \frac{5}{8}$ ல் ஆகிய) ஐந்தில் மாற - உராயுரு
= (225) = ($5 \times 45 = 225$) இதுவுடனே மீ சூ (6) னாள் படுத்த - ரூஅயி
(180) இதுவுடனே னாள் - ல = (10)ம் பத்தும் கூட்ட ஆ ராகுயி = (190)
னாளில்மாற—

$$\text{உர. ர. உஸ} = (200 \times 100 = 20000)$$

$$\text{உர. கூய : லுசு} = (200 \times 90 = 18000)$$

$$\text{ர. உய : உசு} = (100 \times 20 = 2000)$$

$$\text{கூயு. உய : சூஅர} = (90 \times 20 = 1800)$$

$$\text{ர. ரூ : ரூ} = (100 \times 5 = 500)$$

$$\text{கூய. ரூ : சாரூய} = (90 \times 5 = 450)$$

ஆக - சயிஉதீளாருய = 42750 = (20000 + 18000 + 2000 + 1800 + 500 + 450) இதை முன்னிருத்தின - உாசயி (240) பேருக்குக் குடுக்க ஈய்வு =
 னாயிஅழு ($\frac{42750}{240} = 178\frac{1}{8}$) இதை குருணி வாயில்களிக்க -
 யிகள-ஹுநிநு ஆதலால்:- நயி நாள் (30 நாள்) சேவித்தானுக்கு ௫ உ-
 காலால்-நா (3கலம்) ஆ - மீ ௬ (6) நாள் - யி (10) சேவித்தானுக்கு -
 அபு உ காலால் - யிக. ன. ஹுநிநு என்பது

மத்தும் வந்தன வெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும் :-

விருத்தம் :-

மாதமே னுக்கு னுள்க்காலினாலே வாகாக நாக்கலமே. பெத்தவேணும்—
த வெண்ணுளிக்காலால் இருபத்தாறு புரிந்தகலம் பத்தினவன்
 சேவிக்குந் திங்கள் யேதனில் (யாதென்னில்) :-

முன்மாக்காலும் நெல்லும் மாறி இசனுக்கே உத்ததெல்லாந் தாக்கி (உத்த
 தெல்லாந்தாக்கி) ஈய, சாதகமாய் வரும் பேரைநாளதாகத் தவறாமுறை
 யென்றார் தமிள் (யி) வல்லாரே (14) என்பது :-

விரித்துக்காட்டல் :-

நயி (30) னுள் சேவித்தானுக்கு ௬ உ. (6உரி)க் காலால் - சள (கலம் 4) ஆ
 அ உ (8உ)க் காலால் - உயிசு-ள- (26 கலம்) பத்திக்கொண்டவன்
 சேவிக்கும் மாதமெத்தனையென்றால் :- ௬ உ (6உ) யாகிய - ௬ ரு (6ரு)
 சள (4ள) மாகிய - சுயி - மரக்காலையாற சுயி. ௬ : நாகுயி = (60 × 6 = 360)
 என்று நிருத்தி - அஉ (8உ) யாகிய - அ ம (8ம) உயிசு. ள. (26ள) மாகிய-
 நாகுயி (39௫) மாற [இங்கே விவரணம் யாதென்றால் : (6உ) யாகிய -
 6 மரக்காலையும். (4ள) மாகிய (4 × 15 = 60) = 60 மரக்காலையும்மாற
 = 6 × 60 = 360. என்றும், (8உ) யாகிய 8 மரக்காலையும். (26ள) மாகிய
 (26 × 15 = 390) = 390 மரக்காலையும் மாற = 8 × 390 = 3120]
 = நூநாஉயி 3120. மூவாயிரத்து நூத்திருபத்து இதவுடனே முகலாகிய
 நயி (30) பாற சுயிநூசுளா = (3120 × 30 = 93600) இதனை முன்னிருத்தின
 முன்னுத்தறுபத்துக்குக் குடுக்க (வேண்டிய விவரணம் கீழே)

உாரு நாள : சுயிசு = (200 × 300 = 60000)

உாரு. சுயி : யிஉதீ = (200 × 60 = 12000)

நாரு. சுயி, யிஅதீ = (300 × 60 = 18000)

சுயிரு. சுயி : நூசுளா = (60 × 60 = 3600)

ஆக சுயிநூசுளா (93600)ம் [உாசுயி = 260க்குச் சரி (ஆதலால்) ஈய்வு-உாசுயி
 (260) இதனை (நாளானபடியால்) மாதப்படுத்த மீ அ (8) னுள்-உயி (20)

ஆதலால் :- நயி (30) நாள் சேவித்தானுக்கு (௬உ) காலால் (சயி) ஆக (அஉ)
 காலால் - (உயிசு. ள) பத்தினவன் சேவிக்கும் மீ யெத்தனை யென்றால் :-
 மீ அ (8) நாள் உயி (20) என்பது :-

தாளிசை :—

கோல்தான் பதினாறு (16) லுற்றளவு கொண்டுவந்த ஒருமாவிலங் கூறதாக, அது ஐளியே குறுணி கொள்ளவே வருங்காலதால், ஏல வெண்கல வரிசை யாகவும், மிசை யிருத்திமுன் வணா (3வண) ஏத்தமான இருபத்து நாலடி இந்தக்கோலிலிருப்பாநில . . . லமே ஒருதவணு மென் (ண்) படிக்காலி வெத்தனைக் கணக்கெனக்கணுக் கோலினைத் தண்ணைபாறின் முன்கண்ட மாவினில் - தாக்கியே - ஞால மென்ன வ(து) னு கட்சியெட்டதனில் நாட்டி. நீர் முதலாகவே நவீன்ற மற்றதுமறி நயந்து கலம் நன்மை யாகவுறை நண்ணியே (15). பென்பது.

இதை விரித்துக் காட்டல் :— (குறிப்பு :— கால் = மரக்கால் என்பது) :—
யசு (16) டிக்கோலால் - (மா-நிலத்துக்கு) :—

ப (மாவு) ரு - சு உ (6உ) க்காலால் (ஆறு உறி மரக்காலால்) அ-ள. (8கல) ஆ - உயச (24) டிக்கோலால் உ ப— (2 மாவு) ரு அ (8) உறிக்காலால் நெல் பெத்தனை பென்றால் :—

முதலாகிய - யசு (16) யு-ந் (தண்ணில்) மாற குழி உயிருயசு (256) நிலம் ஒதுவாகிய ஒன்றுடனையுமாற-உயிருயசு (256). இதை கடசி (அ உ = 8 உ ரி) யாகிய (அ)ல் மாற- உச்சுயஅ (2048) பென்று முதலாக நிருத்தி —. சு (6) வ. யாகிய - சு (?) [? = (ரு)] க்கும் - அ ள (8 கல) மரகிய னுய (120) ரும் மாற ளாஉய (720 = 120 × 6) - உயச (24) யுந் தன்னால் பாற - ளாஉயசு = (576) இதுவுடனே முன்னிருத்தின - ளாஉய (720) ஐ மாற :—

$$\text{ளா ரு. ளா : ளாசுருயசு} = (700 \times 500 = 350000)$$

$$\text{ளா ரு. எய : சயசுசு} = (700 \times 70 = 49000)$$

$$\text{ளா ரு. சு : சசுஉள} = (700 \times 6 = 4200)$$

$$\text{ருள ரு. உய : யசு} = (500 \times 20 = 10000)$$

$$\text{எய ரு. உய : சசுசா} = (70 \times 20 = 1400)$$

$$\text{உய ரு சு : ளாஉய} = (20 \times 6 = 120)$$

ஆசு சாசுயசுசுளாஉய = (414720) இதனை - உ (2) ப— - மா-வாகிய உ = (2)ல் மாற - அளாசுஉயசுசாசு (8,29,440) இதை முதலாக நிருத்தி - உச்சுயஅ (2048) ருக் குடுக்க :

$$\text{உசு : சா : அளாசு} = (2000 \times 400 = 800000)$$

$$\text{சா ரு. சய : யசுசு} = (400 \times 40 = 16000)$$

$$\text{சா ரு. அ : ளசுஉள} = (400 \times 8 = 3200)$$

$$\text{உசு-ரு : யசு} = (2000 \times 5 = 10000)$$

$$\text{சய-ரு : உள} = (40 \times 5 = 200)$$

அ-ரு: சுய = $(8 \times 5 = 40)$ ஆ. இகன் மொத்தம் யாதென்றால்:—

$$(மரு \times உயௌ) \left(\frac{829440}{2048} \right) = 405 = (\text{சாரு}) \text{ ஆ. இகனைக் குறுணிவாழில்}$$

$$\text{களிக்க} - \left\{ (27) = \left(\frac{405}{15} \right) \right\} \text{ ள். ஆதலால்:—}$$

யசு (16)யக் கோலால்-ப— ரு - சு உ(உறிக்) காலால் அள ஆ - உயச - டிக்
கோலால் உ ப— (உ ப = இருமா) ரு-அஉ (உறிக்) காலால் — உயௌ-
ள-(27-கலம்) என்பது உ.

இது வன்றியுந் நிலத்தில் சில்வானமாக வந்தால்-நிலம் ஒருமாயுக்கு (ப-ரு)
யசு (16) முந்திறி யென்று பெருக்கிச் சொல்லுவது:—

விரித்துக் காட்டல்:—

யஉ (12)அடிக்க கோலால்-ப (1-மா = ப—) ரு-அ (8)உக் காலால் ளுள
(3 = மூன்று கலம்) ஆ - உயச (24)அடிக்க கோலால் — ௨ வது ள ரு
 $\left(\frac{1}{80} + \frac{3}{320} = \frac{5}{320} = \frac{1}{64} \right)$ கலத்துக்கு சு (6)உக் காலால் ளுடி பெத்தனை
யென்றால்:—

முதலாகிய - யஉ (12) யுத்தன்னால் மாற னாசு (144). இதுவுடனே ஒருமா
(1=ப) வைபு முந்திரி = யசு (16) ஆ வச்சு (வைத்து) மாற - உச்சுநாச
(=2304) இதை கடையாகிய - சு (6) ியும் சு (6) ஆ வச்சு (வைத்து)
மாற - லுச்சுஅளஉயச (= 13824) பென்று முதலாக நிறுத்தி - அ (8) உ-
யாகிய - அ (8) ரு = (பட்டித்தம்) முக்கலாகிய-சயரு (3 × 15 = 45)
ரூம்மாற ளாகிய (360) இச்சு உயச (24) யுத்தன்னில் மாற ளுளயசு
(24 × 24 = 576) உ - னேமாற

$$\text{ருள ரு. ளா : ளாருயசு} = (500 \times 300 = 150000)$$

$$\text{ருள ரு. சுய : ளுயசுநா} = (500 \times 60 = 30000)$$

$$\text{ருள ரு. எய : உயசுசு} = (300 \times 70 = 21000)$$

$$\text{எய ரு. சுய சசுஉள} = (70 \times 60 = 4200)$$

$$\text{ருள. ரு சு : சசுஅள} = (300 \times 6 = 1800)$$

$$\text{சுய ரு. சு : ளாசுய} = (60 \times 6 = 360)$$

ஆ = [உளசுநாசுய = (207360)] இதுவுடனே - நிலமாகிய (௨ வது) ள யம்
(முந்திரிப்படுத்த :— ரு) = [(நிலமாகிய - (௨ வது) ள = $\frac{1}{80} + \frac{3}{320} = \frac{5}{320} = \frac{1}{64}$ ள யம் முந்திரிப்படுத்திய = $\frac{1}{64} \times 320 = 5$)] ருஇழு (5) மாற:—

$$\text{உளசுரு. ரு : யாசு} = (200000 \times 5 = 1000000)$$

$$\text{எசுரு. ரு : ளுயருசு} = (7000 \times 5 = 35000)$$

$$\text{ருளரு. ரு : சுருள} = (300 \times 5 = 1500)$$

$$\text{சுய. ரு : ளா} = (60 \times 5 = 300)$$

$$\text{உளசு. இ : ளாசு} = (200000 \times \frac{1}{2} = 100000)$$

$$\text{எசு. இ : ளுயருள} = (7000 \times \frac{1}{2} = 3500)$$

$$\text{நா. இ : நாடு} = (300 \times \frac{1}{2} = 150)$$

$$\text{கூ. இ : கூ} = (60 \times \frac{1}{2} = 30)$$

$$\text{உள்கூ-பு : உயிருக்} = (200000 \times \frac{1}{8} = 25000)$$

$$\text{எக்-பு : அளவெடு} = (7000 \times \frac{1}{8} = 875)$$

$$\text{நா-பு : நயள இ} = (300 \times \frac{1}{8} = 37\frac{1}{2})$$

$$\text{கூ-பு : எஇ} = (60 \times \frac{1}{8} = 7\frac{1}{2})$$

$$\text{ஆ} = [\text{யக'க(டு)கூ'கூகூசுள} = (\text{ளயகூகூ'கூகூசுள})] = (1166400)]$$

இதை முன்னிருத்தின முதல் - யகூஅளஉயசு = (13824) க்குக் குடுக்க அயச வபு = $(84\frac{3}{4})$ - இதை குருணிவாயில் கழிக்க - நுள - சச - மீர் உ(உரி) சூ = (5 கலம்-தூணி 4-மரக்கா உ;உறி $\frac{3}{4}$) என்பது.

மத்தும் வந்தன வெல்லா மிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.

விருத்தம் :—

பணமொன்றுக் கெண்ணுளிக் காலிரால்

நெல்பதக்கு மறுனாவி விலைபகருங்காலை

குண முடையீரொன்பது பொன் ஏளுக்கேநெல்

கூறு வீரறுனாவி காலாலென்னில் .—

பண முதலும் அறுனாவினையு மாறிப்

பண்பாகப் பணமொன்றுந் துகையுந்தாக்கி

மணமலர்சேர் குளமுல் படனீர் முன்னுகைக்கிப்பந்து

வருமீவைத்தான் குருணிவாயில் நாட்டே (16) என்பது :—

இதை விறித்துக்காட்டல் :—

பணம் க (1)க்கு-அ (8) உரிக் காலால் ஐடி ஹ-கூஉ = (பதக்கே ஆறு உறி) ஆ - கூ பொன் எ (= 9 பொன் 7)று-கூ (6) உரிக் காலால் நெல் யெத்தனை யென்றால்.—

முதலாகிய பணமொன்றும் - கடைசியாகிய; கூ (6) உரியாகிய - கூ (6)ம் மாற-கூ; க; கூ (= $6 \times 1 = 6$) என்று முதலாய் நிருத்தி-அஉ (8'உறி) யாகிய-அ (8)ம் பதக்கே அறுனாவிாகிய-உ சூ ($2\frac{3}{4}$)ம் மாற :—

உயஉ ($2\frac{3}{4} \times 8 = 22$) ஐடி (ஹரி) - கூ பொன் எ (9 பொன் 7)ம் பாணப்படுத்த ($97 = 9 \times 10 + 7$) = கூயள - இதுவுடனே உயஉ (22) மாற = உகூநாநயச (= 2134) இதனை முன்னிருத்தின.....பேருக்குக்குடுக்க-சயவு-நாநயடு இந்நிலை ($335 + \frac{1}{2} + \frac{3}{20} + \frac{1}{80} + \frac{1}{320} = 335\frac{213}{320}$)

[இங்கே விசேஷம்:—ஆக 2134ஐ வகுக்க வேண்டிய எண்-6. (ஆறேதான்); சுவடியில் எக்காரணத்தாலோ — (நாநுரு இ நிறுவது) என்றிருக்க வேண்டிய துடையானது (நாநுரு இ நிறுவது) என்றே தானிருக்கிறது. இதை புத்தி மான்கள் அவசியம் ஆலோசனை செய்ய வேண்டியதாகும். மேலும் இதன் வாஸ்தவமான எண்ணிக்கையின் $= [(2 \frac{1}{6} \times 320) = 355 \frac{2}{3}] = (355 + \frac{2}{3} \times 320) = (355 + 213 \frac{1}{3}) = (355 + 213 \frac{1}{3} \text{ வது}) =$ (என்றால் மூன்றிலோர் பங்குடன் கூடிய இருநூத்துப் பதின்மூன்று முந்திரியும் மூன்றாத்தைப்பத்தைந்த மென்று சொல்வது.)]

இதைக் குறுணிவாயில் களிக்க:— உரு கலம் தூணி ௪ (23 கலம் தூணி 4) ஆகலால்:— பணம் ௧ (1) ரூ அ ௨ (8௨) க்காலால் (ஹ ௪ ௨) ஆக — ௬ பட எ ரூ — ௬ உறிக்காலால்: உரு ௪ ௪ தூணி உறி - ௧ - = (கலம் 23 தூணி 4 உறி-1-) என்பது.

விருத்தம்:—

மூவியிலு மறுணுளி க்காலிலே

பொருந்திய முக்குறுணி ஒருபணமதாக—

மேகியதோ பென்ன(ண்ண) ளிக்காலிலே

விளங்கியெல் பெண்கலமே விலையே(யா)தென்னில்

கூவியமுன்படி யுடனேமுக்குறுணி தாக்கிக்

கொண்டதனை முதலாகக் குறித்துக்கொண்டே

ஒவியமாய் வருமூன்று துகையும்மாறி

ஒருதுகைக்கீயந்தே பணத்தை உறைத்திடறே (17) என்பது.—

பணம் - ௧ (1) ரூ ௬ (6) உறிக்காலால் (முக்குறுணி) ஆக அ (8)௨ க்காலால் அ ௪ (8 கலத்துக்கு)ப் பொன்னெத்தையென்றால்:—

௬ ௨ யாகிய : ௬ (6தும்), (3க்குறுணி) யாகிய ௩ (3க்கும்) பெருக்க ௬. ௩ : ௨ஆ (= 6 × 3 = 18) என்று நிறுத்தி;— அ (8) ௨ யாகிய (8ம்) அ-ம் எண்கலமாகிய (= 8 × 15 = 120) - ஈஉரு -க்கும் மாற:—

கூகூரு = (960) இதைப்பணமாகிய - ௧ (1)ல் மாற = (960 × 1 = 960) = கூகூரு. இதை முன்னிருத்தின - ௨ஆ (18) ரூ க்குக்க கூவிய-(பணம்)- = ௩௦௩௩௩௩ இந்நிறுவது இம்மி ௩ இ = $[(53 \frac{1}{3}) = (\frac{960}{18}) =$ (பொன்-ரு; பணம் - ௩வகில்கு இ நிறுவது - இம்மி - ௩இ = பொன் 5-பணம்-3 $\frac{1}{3}$)]:— என்பது.

கொச்சகம்:—

ஒருட்டு மாத்தில் ஒருகிரகன்பணமே—

நேரிட்ட நாலெளம்(நாலெளம்) நீயாறுமாத்துக்கு

பேரிட்ட முன்னிரண்டும் பெருக்கமுதல்முன்றும்

நீரூட்டத்தாக்கி நிறுத்திவைத்துகைக் கீய்விடே (18) என்பது:—

இதை விரித்துக் காட்டல் :—

அ (8) மீ (மாத்து) விராகன் க ரு (1க்கு) [உயி = (23) பணமாக]

கூ மீ (6மாத்து) விராகன் ஒன்றுக்கு ப— (பணம்) யெத்தனை யென்றால் :—

அ-ம்-க-ம்-பெருக்க அ. க : அ = $(8 \times 1 = 8)$. என்று நிருத்தி - உயி,ம்
கூ ல் பெருக்க :— (கூமாஅ) $(= 28 \times 6 = 168)$ இதைக் கடசியாகிய ஒன்னில்
மாற = கூயிஅ (168) இதை முன்னிருத்தின - அ ரு (8க்கு) க்குடுக்க ஈய்வு
செ உயி $(1^6_8^8 = 21)$.

ஆதலால் :— அ (8) மீ விராகன் க (1)க்குப் பணம் உயி (28) ஆக-கூ (6)
மீ விராகன் க (1) ரு செ - உயி (21) பணம் என்பது :—

கொச்சகம் :—

மாத்தெட்டில் நன்றுய்வரும் விராகன்னேளுங்கே

(நான்கே)த்தவிலை ஒன்பதுபொன்

னெட்டுக்கே ளுமாத்தில் பாத்துவிலை

கூபபனு (க்குப்பணம்) பின்மாத்தும்

பெருக்கியேத் துகைதாக்கி

முதலுக்கியந்து மிகசொல்வீறே = (19)—

யென்பது :—

அ (8) மீ ல் விராகன்-க. ரு [உயி (28) பணமாக] உ பொ-அப (2-பொன்
8 பணம்)] பணமாக கூயி (98) ரு எ (7) மீ ல் விராகனெத்தனை யென்றால் .—

பணமாகிய - உயி (28) ரு - இருபத்தெட்டுக்கும் - பின்மாத்தாகிய- எ-ரு
(7க்கும்) பெருக்க - கூயி $(28 \times 7 = 196)$ என்று (வெத்து.) நிருத்தி - முன்மாத்
தாகிய - அ ரு (8க்கும்) பணமாகிய - கூயி (98) ரும் மாற - ளாஅயிச =
 $(98 \times 8 = 784)$ இதனுடனே விராகனாகிய - க (1) ல் மாற - ளாஅயிச (784) -
முன்னிறுத்தின - கூயிச = (196) ரு க்குடுக்க ஈய்வு - ச $(= \frac{784}{196} = 4)$
ஆதலால் :— அ மீ விராகன்-க- ரு உயி பணம் ஆக கூயி ரு எ மீ ல்
விராகன் ச $(= 4)$ என்பது.

கட்டளைக்கலிப்பா :—

சொன்னமாத்திற்கு நான்கைந்திடையுடனே—

தொன்று முண்டெட்டறை - மூன்றுமே—

இன்னமென்னறை நாலாறுமாத்தி

ரண்டேகமாக வுறுக்கியமாத்து

என்னவோவென்னிலே :—

இடைமாத்தையும் இதக்கமாறி

யிடைக்கியந்து.....மாகி தெனப்பகா —

இந்த வாராக வருங்கணக்குயாவுமே (20)

என்பது :—

இதை விரித்துக்காட்டல் :—

அ (8) மீல் விரகன் - ரு (5)—

எ (7) மீல் விரகன் - உ (2)

அ இ (8½) மீல் விரகன் - ரு (3)—

எ இ (7½) ஷெ — ஷெ ச (4)

சு (6) ஷெ — ஷெ - உ (2)

ஆ அஞ்சுவகையு மேகமாக (ஒன்றாய்ச் சேர்த்து) உறுக்க. எத்தனை மாத்
துக் காணுமென்னில் :—

அந்தந்த மாததையும் விரகனையும் ஒன்றுக்கொன்றுமாற :—

அ. ரு : சய = $(8 \times 5 = 40)$

எ. உ : ஷெ = $(7 \times 2 = 14)$

அஇ ரு. ரு : உயருஇ = $(8\frac{1}{2} \times 3 = 25\frac{1}{2})$

எஇ ரு. சரு : ருய = $(7\frac{1}{2} \times 4 = 30)$

சு ரு. உரு : யஉ = $(6 \times 2 = 12)$

ஆ = ருஉயருஇ = $(121\frac{1}{2})$ —இதை விரகனாகிய (— ரு உ. ரு. ச. உ) = ருச
 $(5+2+3+4+2) = (16)$ ருக்குடுக்காய்வு - எ இயாகு = $[(7+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32})$
 $= (7+\frac{5}{16}+\frac{9}{160}+\frac{3}{1000}+\frac{7}{10000}+\frac{5}{100000}) = (7+\frac{59375}{100000}) = (7.59375)$
 $= (7+\frac{10}{32}+\frac{9}{32}) = (7\frac{19}{32})$ மாத்தென்பது.

இன்னாகவீத்துண :—

பேலானுன்பதறை பாத்துகாலு விரகனிலே—

யெ (யெ)வானவெள்ளி இசனோடு இருக்க

வேணமாத்நிலருகரு நூலா கம ந்தனில்

முன்மாத்துடனு வு(னு)னுனிடையேருக்குப்

பாலாமாசிதம்புக்கு மாத்துக்கீய்ந்து—

பகர்வா யென்னே :— (21)

இதை விரித்துக்காட்டல் :—

சுஇ (9½) மீல் விரகன் - ச (4) ல் சிறிது வெள்ளி போட்டுருக்க - அ
(8) மீத்து கண்டது — இசிற்புகுந்த வெள்ளி யெத்தனையென்னில் :—

முன் மாததாய - சுஇ (9½)யும் - விரகனாகிய - ச - (4)-ம் பெருக்க - ருயஅ
(38). இதை பிறகண்ட மாத்து - அ (8) ருக்குடுக்காய்வு - சனா = $(\frac{38}{8} = 4\frac{3}{4})$ -
முன் விரகன் - ச (4) போக நீறு அதியம் (அதிகம்) வெள்ளி விரகன் —
தா(¾) ஆதலால் :— சுஇ மீ விரகன் - ச - ல் சிறிது வெள்ளி போட்டுருக்க -
அ - மீக் கண்டால் :— உள்புகுந்த வெள்ளி விரகன் = $(த = \frac{3}{4})$ என்பது.

ஆசிருவருத்தம் :—

மாதவன் சொன்ன முருவன்னமும் வண்மைந்தன் மலாமானிடையும் ரகமரு
வருக்கயமும்-மறை தூலா ஸத (ஸ்த)ருவாக வருகின்ற அங்கமணில் பொந்தநவவீர்
கருங்குணமைந்து முதமுமபுகாமி குங்காண மோன்றூப் பூணமதாகவே நிரை
கின்ற அருளினை புகலுதற் கெளிதாருமோ—காதலுடனவாவா (னவாவா)
பெருமை நின்ற...பு முளங்கண்டு கொண்டினி தாக்கியே— கணமாக
வைத்த பின்னிடையிலே வருகின்ற காவதனை யெஞ்(ன்) சொல்லுவேன்—ஆதா
வாகவே புகர் மொளியை பேல் வைத்து அரிதாக வுதவிசெய்து வாமெனவுமே
காதாமிதனையே தெரிந்தரைகின்ற சவினிதவித்யே (22); என்பது :—

விரித்துக்காட்டல் :—

ய. மீர் விருகன். ரு = (10 மீர் விருகன் 5)—

அ. மீர் விருகன். ச = (8 மீர் விருகன் 4)—

எ. மீர் விருகன். ரு = (7 மீர் விவ 5)—

சு. மீர் விவ சு = (6 மீர் விவ. 9)—

ந. மீர் விவ ரு = (3 மீர் விவ. 5)—

இதையுடனே வெள்ளிவிராகன் (ஷ) ச (4) - ஏகபாய் உறுக்க எத்தனை மாத்
துக்காணு பென்னில் :— பாத்துநிறையும் மினத்துக்கினம் மாறிப்பெறுக்கி
ன; துளையை பொன்னிடையுடனே வெள்ளி இலையுங் கூட்டின; துளையுக்குக்
குடுக்கிறதாவது :

யரு ரு ரு மாத : ருய = (10×5=50)—

அரு சரு : நயஉ = (8×4=32)—

எரு ரு ரு : நயரு = (7×5=35)—

சுரு கரு : ருயச = (6×9=54)—

நரு ரு ரு : யரு = (3×5=15)—

ஆக துகை = ராஅயசு = (186)—

இதை யிடையாகிய (ரு ச-ரு-சு-ரு) = (5+4+5+9+5) ஆக துகை
உயஅ = (28)ம். வெள்ளி விருகனிடையு - ச - (4) ம் கூட்ட ஆக நயஉ
(28+4=32) ருக்குடுக்க ஈயவு ருஜய = $(\frac{186}{32} = 5\frac{13}{16})$ = (ஐந்தேழுக்காலே
வீசம்) — ஆதலால் :— ஷ (மாதத்து ருஜய) = $(5\frac{13}{16})$ ல் என்பது:—

வேறு :—

அ (8) மாதத்தில் நய (30) களமுஞ்சு பொன் ஓடன் வைக்க - ய (10)
மாதத்தில் எத்தனை களஞ்சு பொன்ஊமென்றால் :—

முதல் - அ (8)ம் - நய (30)ம் பாற - உாசய = (8×30=240) = இதை
- ய (10) மாதத்தில் குடுக்க :—

ஈயவு = உயச $(\frac{240}{10} = 24)$ கழுஞ்சு. ஆகையால் - ய மாதத்தில் உயச (24)
களஞ்சு பொன்னென்பது.

இன்னுமொருவகை :—

எ. மாதத்தில் - மரு களஞ்சியம் = (7 மாதத்தில் 15 களஞ்சியம்); கூஇழு மீல் உயி-களஞ்சியம் = $[(6 \frac{5}{8})$ மாதத்தில் (20) களஞ்சியம்;] - நூ (5 $\frac{3}{4}$) ல் மாதத்தில் - ம (10) - களஞ்சியம் - ஓடன்வைக்க - அ (8) மீ ல் மாதத்தை களஞ்சி பொன் காணுமென்றால் :— மாதத்து மிடையுமொன்றுக் கொன்றுமாற

எறா. மரு : மரு = $(7 \times 15 = 105)$ —

கூஇழு. உயி : மருஉயி = $(6 \frac{5}{8} \times 20 = 132 \frac{1}{2})$ —

நூ. மரு : மருஉயி = $(5 \frac{3}{4} \times 10 = 57 \frac{1}{2})$ —

ஆ துகை - உகாமரு = (295). இதனை பிற்கண்ட - அ ரு (8க்குக் குடுக்-
சாய்வு - மருகனா = $(2 \frac{9}{5} = 36 \frac{2}{5})$ — ஆதலால் :— ஓடன் வைத்த விருகன்
சமரு - சண்ட விருசன் - மருகனா = $(36 \frac{2}{5})$ என்பது.

ஆசிரி விருத்தம் :—

வன்னம்கு மொன்பதேகால் மாதத்திவிடையன்றி
வருகின்ற பொன்னுடனே வங்கமொழுது—
காசுடைக் கட்டியுறுக்கிடில்-வருவாமல் வருமாத்துமே
என்னெனில் (விரா) கன்முக்காலுமே உந்திடி லுற்ற
கணக (?) நிறையை இயப்பவே முன்மாதத்தினுக்கே
குறைஇதனிலறை ஒன்றாமென அன்னதனைமுதலாக—
வைத்ததன் - அறையகின்ற மாதத்தினுடனே—அடவான
வெள்ளியி னி றையதனைமாடி ஒன்றறைக்கணக்கியவே
தான்முன்ன வருமீவகை பொன்னிறையாமென்று.
மொளியன (லா) - மென உறைந்தார் முதருகையாவு -
(மி) ப்பொன் கணக்கின்படி மூ தண்ட மாகஉறையே = (23) =
என்பது :—

குவ (9 $\frac{1}{4}$) ஆகிய மாதத்தில் சிறிது பொன்னில் - கூ (6) விருகனிடை
வெள்ளி கட்டியுறுக்க - என (7 $\frac{3}{4}$) மாதத்துக் கண்டால் பொன்னிறை
யெவ்வள வென்னில் :—

முன்பாத்து - குவ (9 $\frac{1}{4}$) ல் பிற்கண்ட மாதத்து என (7 $\frac{3}{4}$) லும் போக நீக்குரை -
கஇ (1 $\frac{1}{2}$) யும் முதலாக நிருத்தி - பின்கண்ட என (7 $\frac{3}{4}$) யும் வெள்ளி நிறை -
கூ (6) ம் மாற - சகஇ $(46 \frac{1}{2} = 7 \frac{3}{4} \times 6 = 7.75 \times 6 = 46.5)$ இதனை முதலாக
நிருத்தின - கஇ (1 $\frac{1}{2}$) க்குக் குடுக்க சாய்வு - மருக = $(\frac{46.5}{1.5} = 31)$ ஆதலால்
பொன் (விருகன்)—மருக (31) என்பது—

கூ ஸ்	விறுகன்	கூ	=	(6 மாத்து விறுகன் 6)
எ ஷெ	ஷெ	எ	=	(7 ஷெ ஷெ 7)
அ ஷெ	ஷெ	அ	=	(8 ஷெ ஷெ 8)
கூ ஷெ	ஷெ	கூ	=	(9 ஷெ ஷெ 9)
ய ஷெ	ஷெ	ய	=	(10 ஷெ ஷெ 10)

சிறிது வெள்ளியுங் கூட்டியுறுக்க - எஇ (7½) மாத்துக்கண்டால் - கூட்டின வெள்ளி பெத்தனை யென்னில் :—

இனத்துக்கு (ம்) மாத்துக்கு (ம்) நிறையும் மாற :—

கூ ரு.	கூ : ஈயக	=	(6 × 6 = 36)
எ ரு.	எ : சயக	=	(7 × 7 = 49)
அ ரு.	அ : கூயச	=	(8 × 8 = 64)
கூ ரு.	கூ : அயக	=	(9 × 9 = 81)
ய ரு.	ய : ஈ	=	(10 × 10 = 100)

ஆ ந ௪௪ - ஈயக = (33) இ ௪௪௪ ன் - மாத்து - எஇ (7½) ரு குதிக்க ஈயவு - சயச = (44 = 330 ÷ 7½ = 330 ÷ 1½ = 330 × ⅔ = 660) ∴ ஷெ = 44) முன் கூட்டியுறுக்கின அஞ்சுவகைப் பொன்னும் (உடைய) விறுகன் - சய = (40-ம்) போக நீர விபாகன் - ச = [(ஷெ 44—1—7—8—9—10) = (44-40)] = 4 ஆதலால் - கூட்டின வெள்ளி விறுகன் ச (4) என்பது.

கூ	மாத்தில்	விறுகன்	ய	=	(6 மாத்தில் விறுகன். 10)
எ	ஷெ	ஷெ	ய	=	(7 ஷெ ஸ் 10)
அ	ஷெ	ஷெ	ய	=	(8 ஷெ ஷெ 10)
கூ	ஷெ	ஷெ	ய	=	(9 ஷெ ஷெ 10)
ய	ஷெ	ஷெ	ய	=	(10 ஷெ ஷெ 10)

இதனுடனே மாத்தறியாமல் - அ (8) விறு. (விறுகன்) பொன் கூட்டியுறுக்கிக் கண்ட மாத்து - அ (8) ஆதலால் மாத்தறியாப் பொன்னுக்கு மாத்து எத்தனை யென்றால் :—

மாத்தாகிய-கூ-எ-அ-கூ-ய ஆக சய = (6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40) இதைக் கண்டமாத்து - அ (8)ல் மாற :—

ஈயக (40 × 8 = 320) நிருத்தி—.

மாத்துக்கும் பொன்னுக்கும் மாற :—

கூ ரு.ய ரு	மாற: கூய	=	(6 × 10 = 60)
எ ஷெ ய ஷெ:	எய	=	(7 × 10 = 70)
அ ஷெ ய ஷெ:	அய	=	(8 × 10 = 80)
கூ ஷெ ய ஷெ:	கூய	=	(9 × 10 = 90)
ய ஷெ ய ஷெ:	ஈ	=	(10 × 10 = 100)

ஆறுதலை = சரா = $(100 + 90 + 80 + 70 + 60 = 400)$ ல் முன்னிறுத்தின-நாடல் (= 320)ம் போக நீக்கு = அறு = $[(400 - 320) = (80)]$ இதை மாத்தமியாத-விறுகன்-அறு (8)க்குக் குடுக்க சாயுய = $(\frac{80}{8} = 10)$ ஆதலால் :-

ய = (10) மீல் (மாத்தில்) என்பது.

(வேறு)

ஒரு ராசாவினிடத்திலே ஒரு சேவு(வ)கனுக்கு தினம் ஒரு விறுகன் சம்பளம், அந்த சேவகன் எந்த வேளையில் வந்து சம்பளம் கேற்ப்பாடு அந்த வேளையில் சம்பளங் குடுக்கிறதனாலே :- ஓர் வநஷத்துக்குச் சம்பளம் பத்து மோதிரமாகச் செய்யப்பாட்டு :-

கட்டளைக் கலிப்பா :-

ஆண்டுதானொரு முன்னூற்றறுபது வான
நாளின்படி கட்டளையில்-வேண்டுமோதிரம் பத்தில்
முன்னூறுடன் விறுகன் ருனிறுமுப்பது
வேந்தனு மருண்டு கொண்டனன்
ஒன்றுமிரண்டும்-புகலுமுன் (மு) முன்றது நாலுடன்
பத்துமாய்க்கண்ட னாலஞ்சமரகு மெட்டஞ்சம்கூட
(நாரு) நூத்தன்பலுமீயவே-அப்பால் ஒருமா
ஸைததிரி அஞ்சமோதிரம்-“(24)”
விருத்தம் :-

நாப்பதுநான் (நாங்ப்பத்துநான்) சேவித்தோன் தனக்குத்தானும். -

முகியாமலாறைந்து முறைமையாக -

செப்பமுடனினந்த (வினைத்த)விதம் பேசுதிறமாக -

மோதிரத்தை அஞ்சேசேரீர் -

ஒப்பமுடனென்று ரெண்டுநாலுமெட்டும் -

உகந்ததொரு பதினைஞ்ச முகந்தேசெய்யில் -

எப்பவந்து சேவித்தோன் கேட்டானால்

சுய்யலாம் மோதிரத்தை யென்றுந்தானே = (25)

கட்டளைக்கலிப்பா :-

மன்னனுக்கு மன(னை)வியர் மூவர்கள்மைந்தனன்

வாதான வெள்ளறிக்கனி-அன்னவந்தான்

(அன்னவன்றான்) மூன்று கூறுக்கியே -

(அளித்தானதனை) அளிதள்ளநனையாக

யொன்றதிகமே இன்னவாந்த

மூவருமே செயிலிருந்த மீதியிரைவன் -

சரியிடில் முன்னலந்தகனியறு னுன்குடன் -

மொளிவமொன்றென மூதறிவோர்களை = (26) -

கொச்சகம் :—

மத்தகசம் பத்தினுக்கே மருவிய பொன்ன (னை) சேர்த்தும்
 பரிபண(ம்) பத்தஞ்சுதனக்கே—
 நாலுபத்துட னென்றேகால்—
 பணந்தகரென முந்தினுக்கே—
 உத்த இருநான்கும்—
 முக்காலும் வேண்பரபணமு நூறே = (27)

கொச்சகம் :—

தித்திக்கும்பூசனிக்காய் செப்பியபத் தொன்பதுக்கே—
 உத்த தொண்ணுத்தஞ்சு
 வருவது மொன்றினுக் கொன்றாகுவுமே
 கைத்திருக்கும் பாகக்காயி—
 பென்பதோர் நாலு(ம்) பெத்தஉருவும்
 நூறு—பெருங்காசு நூரதாமே = (28)

கொச்சகம் :—

சுவாலி சேலினங்களின் பல
 நீலோபுள்ளினமாய்த—தாலியிருக்கையி
 தமுதானென்றுக்கில்லாதால் மே(வி)லி எளுந்து—
 புட்டான மென்ற
 வாக்குரெண்டாகி வருவியருனென்று—
 குணு புளக்கானமாகியதே = (29)

கொச்சகம் :—

தொண்ணாறு பலாத்துருவை இருநான்குடனெயென்னறிய
 மெ(மே)தி இரண்டுமேதான் சிரக்க அண்ணலே
 பாலொன்றறை மூன்றுநாலுக்கு (கெ)லாம்வண்ண
 மெனவே கவிஞரும் வகுத்தபடி தானிதுவே = (30)

என்பது :—

பசுவுக்குப்பால்படி - க = (1); ஆட்டுக்குப்பால்படி - இ = ($\frac{1}{2}$); எறுமைக்குப்
 பால்படி - ஈ = (3) ஆ உருவும் - நூரு - பால்படியும் நூரே =

கொச்சகம் :—

சனகையுடன் னாலாறு கொண்டகாசிபடிதான்
 துலாவெ (வொ)ன்றினுக்கே—
 தவருமலாறைந்து பணமதாக—
 பரிசமுந்தான் வித்தவணிகனிடமே—

அங்கொருவனேகியோர் பதினாறுகாசிடையான

படியென துலாநீயருளென ஸ்(?)முதலியே(?)

பொருள் கொ(ள்)ளும் வகையினை யடவாகவுரை செய்கவென—

பொங்கமுட(ஸவ)யைந்து துகையென்றிரந்தே முன்பொருந்திய-
விரண்டு முதலாப்ப் போக ஒரு மூன்றையும்—

மாரியதன் முன்னம் புகல்வதற்க் கீய்வோன்—

இங்கிதமதாகவே வந்தொருவன்

பெற்றயிதின் விலையெனத்தொகுப்பீர்

என்னபடி வருகினுஞ் சொன்னபடியாகவே—

ஈய்வர் காணிக்கர் தானே = (31)

இது விரித்துக் காட்டல்:—

உயிச (24) காசிபடியால் துலாம் - க (1)ரு - ஈ(பொன்) (ஈய = 30 பணம்)

ஆ-யிச (16) (காசி) படியால்-துலாம்-அ (8)ரு யெத்தனை என்னில்:—

உயிசம்-க-ம் மாற = உயிச = $(24 \times 1 = 24)$ -என்று நிறுத்தி-யிசம்-அ-ல்

மாற-நாஉயிச = $(16 \times 8 = 128)$. இது உடனே ஈய = (30)ம்

பெருக்க=ஈய் அளவு = $(128 \times 30 = 3840)$ இதை முன்னிருத்தின-

உயிச (24)ருக் குடுக்க ஈய்வு-நாசுய = $(3840 \div 24 = \frac{3840}{24} = 160)$

இதை பொன் படுத்த - யிச = $(\frac{160}{10} = 16)$ (பொன்) என்பது—

பணவிடை அ னு (8 $\frac{3}{4}$) கொண்டது விருகன்-க (1)

பணவிடை-யெஇ (12 $\frac{1}{2}$) கொண்டது களஞ்ச-க (1);

களஞ்ச ஒண்ணுக்கு மஞ்சாடி உயி - ய (20 - $\frac{1}{10}$)

பணவிடை-க (1)ரு மஞ்சாடி - க இ ல் = (ஒண்ணை யேரண்டுமா)

= $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 1 + 0.5 + 0.1 = 1 + 0.6 = 1\frac{3}{5})$;

விரர்கள் ஒண்ணுக்கு-மஞ்சாடி-யிச = (14)—

விருத்தம்: = (32) =

சதிரத்தை நாத்தித்து தானவெண் மெவாயால்—

திராயமொளிந்த பொருளை துதி செ(சே)ரும்

முந்தியி வாயில் களிப்பெணவும்

காணுமே-இந்த விசுளப் பிரப்பு = (32).

என்பது:—

ஐ ரு ஐ = முக்காலுக்கு முக்கால் எத்தனை யென்னில் = $(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = ?$
எனில்):—

ஐ (= $\frac{3}{4}$ = முக்கால்) சதிரம் - கூய = (60) இதைச (4)ல் மாற:—

கா. ச: உளவு = $(60 \times 4 = 240)$ இதை ஐ ($\frac{3}{4}$) வில் களிக்க = ஈஅய =
 $(240 \times \frac{3}{4} = 180)$; இதை ஐ (முந்தி = $\frac{1}{3\frac{1}{2}}$) வாயில்களிக்க: —

இய = $[(180) \times (\frac{1}{320}) = (\frac{9}{16})]$ ஆதலால் தருது: இய = $(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16})$ என்பது.

இரு இ = $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = ?)$ எத்தனை யென்றால்:—

இ (ரு) சதிரம் - சயி (40) = இதை ச (4)ல் மாற = சயி. ச: நாயு = $(40 \times 4 = 160)$ இதனை யரையி $(\frac{1}{2})$ ல் களிக்க - அயு = $(80 = \frac{160}{2}) = 160 \times (\frac{1}{2})$ இதனை முந்திரியி (வது) ல் களிக்க - வ - கால் = $(\frac{80}{2} = \frac{1}{4})$ ஆவதால்:—

இரு இ: வ = $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4})$ என்பது.

வருவ = $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = ?)$ எத்தனை யென்றால்:—

வ $(\frac{1}{4})$ ரு சதிரம் உயி (20) இதனை - ச (4)ல் மாற - உயி. ச: அயு = $(20 \times 4 = 80)$ இதனை வ = (காலி = $\frac{1}{4}$)ல் களிக்க = உயி (20) இதனை வது (முந்திரியி)ல் களிக்க - ய = $(\frac{80}{4} = \frac{1}{16})$ ஆதலால் வருவ ய = $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16})$ என்பது

இரு வ. $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = ?)$ எத்தனை யெனில்:— இ $(\frac{1}{2})$ ரு சதிரம்-சயி (40); இதை ச (4)ல் மாற - நாயு = $(40 \times 4 = 160)$; இதை காலில் கழிக்க சயி = $(160 \times \frac{1}{4} = 40)$ —.

இதனை - வது $(\frac{1}{320})$ யில் களிக்க ணு = $(40 \times \frac{1}{320} = \frac{40}{320} = \frac{1}{8} = \frac{4}{32})$ அரிக்கால். ஆதலால்:—

இரு'வ: ணு = $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \text{அரிக்கால்})$ என்பது.

வரு'ய = $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = ?)$ எத்தனை யெனில்:— வ $(\frac{1}{4})$ சதிரம் = உயி (20) இதனை ச (4)ல் மாற-அயு = $(20 \times 4 = 80)$ இதனை-ய = $(\frac{1}{16})$ வாயில் களிக்க-ரு $(\frac{80}{16} = 5)$ இதனை வது (முந்திரி = $\frac{1}{320}$)வாயில் களிக்க-ருவது = $(\frac{5}{320} = \frac{1}{64})$, ஆதலால்-வரு ய: ரு வது = $'5 \times \frac{1}{320} = \frac{5}{320} = \frac{1}{64})$ = (காணிமுந்திரி அல்லது கால் வீசம்) என்பது,

சுரு ரு = $(\frac{1}{5} \times \frac{3}{20} = ?)$ யெத்தனை யென்னில் சுரு சதிரம்-யு = $(\frac{1}{5}$ ரு சதிரம் = $\frac{80}{5} = 16)$; இதை ச (4)ல் மாற - கயச = (64). இதனை ரு $(\frac{3}{20})$ ல் களிக்க - கூ இ யி = $9 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \times 9.6 = 9\frac{3}{5}$ இதை வது $(\frac{1}{320})$ ல் கழிக்க - கூ வது கூ இ யி = $9\frac{3}{5} \times \frac{1}{320} = \frac{9\frac{3}{5}}{320} = \frac{1}{100}$ ஆதலால்:— சுரு ரு ரு: கூ வது கூ இ யி (அதாவது நாலுமா $(\frac{1}{5}$ வுக்கு மூன்றுமா $\frac{3}{20})$ = $(\frac{1}{5} \times \frac{3}{20})$ ஆவது அறைமா கீழ் அறையிருமா = $\frac{3}{100} =$ நூறில் மூன்றுபங்கு = 0.03 என்பதாம்—,

நீரு ஹு ($\frac{3}{16} \times \frac{1}{8} = ?$) யெத்தனை யெனில் நீர் சதிரம் $= (80 \times \frac{3}{16} = 15)$ யிரு; இதை ச-(4)ல் மாற-சய $(15 \times 4 = 60)$, இதை-ஹு ($\frac{1}{8}$)வில் கழிக்க-எ இ $= \left\{ (60 \div 8) = (7\frac{1}{2}) \right\}$ இகனை முந்திறி ($\frac{1}{320} =$ வது) வாயில் கழிக்க-உ ரு ரு வது இ $= [(\frac{1}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{640}) = (7\frac{1}{2} \times \frac{1}{320} = (\frac{75}{640}) = \frac{15}{128})]$ ஆதலால்:— நீரு ஹு ரு - ரு ரு வது இ $(= \frac{15}{128})$ என்பது—.

நீரு.ப $= (\frac{3}{20} \text{ ரு } \frac{3}{20} = \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = ?)$ யெத்தனை பென்னில்:—

நீரு சதிரம் $(80 \times \frac{3}{20} = 12) =$ யெ - இதை ச (4)ல் மாற-சய $= (12 \times 4 = 48)$ - இதை ப ($\frac{1}{20}$)ல் கழிக்க - உ வரி ($\frac{48}{20} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$) இதை வது ($\frac{1}{320}$)யில் களிக்க - (ரு க் வ ரு).

ஆதலால்:—

நீரு ப $=$ ரு க் வ ரு $= [(\frac{12}{5} \times \frac{1}{320} = \frac{12}{1600}) = (\frac{3}{400}) = (\frac{3}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{3}{400})] = [(ரு க் வ ரு) = (\frac{1}{20} + \frac{1}{1280} + \frac{3}{6400}) = (\frac{40 + 5 + 3}{6400}) = (\frac{48}{6400}) = (\frac{3}{400})]$ இதற்குப் பெயர் - (அறைக் காணியே கீழ்க் காலே மும்மா) $= (ரு க் வ ரு)$ என்பதாம்:—

விருத்தம்:—

ஒருவன் பேரில் நானுத்திருமெனத்த

யென்னில், வரும் பொருளைத் தன்னில் மாறி—

மது மலலினித்தி நால(லை)த் தாக்கி—

பெருமையா மெனத்துக் கீய விரைந்தும்

ஒருவன் பேரை - அருமையாம்

விசாலமென்னும் மறிந்திடு மியல்பு தானே $= (33)$

விரித்துக் காட்டல்:—

ஹு ரு ஹு ($\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = ? =$ அரிக்காலுக்கரிக்கால்) எத்தனையென்றால்:—

ஒருவன் பேரு முத்தன். எனத்து நானு. (ச = 4) இதை-ஹு $= (\frac{1}{8})$ -வாயில் மாற-இ $= (4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2})$ இதை மருத்து-ஹு ($\frac{1}{8}$)ல் மாற-ய $= (\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16})$ இதை பேரெழுத்து-ச-(4)க்குக் குடுக்க சய-உ வது $= [(\frac{1}{8} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{128}) = (\frac{4 + 1}{320}) = (\frac{5}{320}) = (\frac{1}{64})]$

ஆதலால்-ஹு ரு ஹு $=$ உ வது $= [(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}) = (\text{காணிமுந்திறி})]$ என்பது.

பீ ரு பீ: ($\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = ?$) எத்தனை யென்னில்:—

ஒருவன் பேர் வீரன்:—

எழுத்து - ஈ = (3). இதை - ஐ ($\frac{1}{10}$)ல் மாற = வ ப = [$(\frac{1}{4} + \frac{1}{20}) =$
 $(3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10}) = (\frac{5+1}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10})$] - மத்தும்-ஐ ($\frac{1}{10}$)ல் மாற-
 சு ஷு கீஇ ஐ = [$(\frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{30}) = (\frac{80+10+5+1}{3200})$
 $= (\frac{96}{3200}) = (\frac{6}{200} = \frac{3}{100})$] இதை எழுத்து ஈ (3)க்குக் குடுக்க:—
 ஈயவு-டு ஷு கீ சு = [$(\frac{1}{100} + \frac{1}{300} + \frac{1}{1800}) = (\frac{10+5+1}{1600})$
 $= (\frac{16}{1600}) = (\frac{1}{100}) = (\frac{3}{100} \times \frac{1}{3})$].

ஆதலால்:—

ஐ ரு ஐ = ($\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$) = (டுஷு கீ சு) என்பது.

மத்தும் வந்தன வெல்லா மிப்படிக்கண்டு சொல்லவும்—.

ஆசுரு விருத்தம்:—

ஐரண்டிள்ள முணுநீளமொடு நான்குமே

யறைகின்ற சீலையதொன்றுக் காண்பணமொன்பது--

விலையாகு, மஞ்சமுளமகல முடனீட்சியே

தான்செய்ய முளமுள்ள மூவஞ்சுகொண்டசீலை

ஈறைந்து தெரியவிலை காணவே செப்பிவரும்

அகலமுந்தனைமாறி-நீள(ள்)மையில(ர்ச்) சொ(சொர்)வதாக்கி

யெ(யொ)ன்றில் ஆய்யமில்லாம(ல்) நீர்மாரு முதலாகுமே

பின்னறைகின்ற ம(வ)கலமதுவுமப்படி நினைந்து

மிக்கானதுடன் மாறியே அன்னதற்கீயுமெனவே—

வைய்யம்புகள மு வரும் காணிக்கர்முன்னவே

வகுத்துரை தொகுத்திதனையே மணமாணர் மாமதுக்குண

மாணலலெண் (ண) வரும் வாரு கண்டு கொள்ளவே:— (34)

இதை விரித்துக் காட்டல்:—

டு (10) முள நீளத்தில்-ச (4) முள அகலத்தில் சீலை-க- (1) று விலை க (1)
 பணம் ஆ அஞ்ச (5) முள அகலத்தில் - பதினஞ்ச முள (15 = முள)
 நீளத்தில் சீலை-டு (10) று விலை யெத்தனை யென்னில்:—

அகலமாகிய நாலும் தன்னை மாற - ச- ச: டிசு = $(4 \times 4 = 16)$ நீளமான - டு (10)
 மாற ஈசுய = $(16 \times 10 = 160)$ சீலை க - (1) ல் மாற = (ஈசுய) =
 $(160 \times 1 = 160)$; என்று முதலாய் நிருத்தி:—

பின்னகல மஞ்சம் தன்னை மாற:—

௫. ௫: உயிரு = $(5 \times 5 = 25)$ - யிரு (15)ல் மாற - ஈளாயிரு $(25 \times 15 = 375)$.
 சிலை - ய = (10)ல் மாற - ஈளாயிரு = $(375 \times 10 = 3750)$ இதை முன்
 விரித்தின - ஈகய = (160) ருக்குக்க ஈய்வு உயிரு (பணம்) சவடி =
 $[(3750 \times \frac{1}{160}) = (23\frac{7}{16}) = (23. பணம் - 4\frac{3}{8})$ (இங்கு $\frac{7}{16}$ ஐ
 10ல் பெருக்க $\frac{70}{16}$ ரு வந்தது $4\frac{3}{8}$)] என்பது.

விருத்தம்:—

அகலமொரு நான்கும் கனமிரண்டு

நீளமா மிரண்டுடசாண்

முளக்கல் லொன்றுக்கே - பகரில்விலை

பொன்னிரண்டாம் கல்மாருப கந்ததன்

னொரு மிருவதுவாம் - நீளமத்தகைமை

யறுசிலையிரண்டு விலையே தென்னில்

சாத்தியமுத்துகை நான்குந் தனிலேமாறி

நிகரில் முதலாகவு (ம்)

பின்னைந்துதாக்கி நின்ற

முதற் கீபந்து-பயனிகழ்த்து வீரே:— (35)

விரித்துக் காட்டல்:—

ச (4) முள அகலம் - [உ (2) முளகனம்] ரெண்டுமுளகனம் - ய (10) முள நீளத்
 தில் கல் - க = (1)ற - பொன் உ (2) விலை ஆ—சு (6) முள அகலம் - ச
 (4) முளகனம் - இருவது முளநீளம் - கல்லு ரெண்டுக்கு விலை யெத்தனை
 யென்னில்:—

ச (4) ம் - [உ (2)ம் மாற அ = $(4 \times 2 = 8)$ - இதை நீளம் - ய (10)ல் மாற-
 அய = $(8 \times 10 = 80)$ இதை கல் - [க = (1)] ல்மாற அய =
 $(80 \times 1 = 80)$. என்று. நிருத்தி:—

சு - ம் - ச - ம் - மாற - உயச = $(6 \times 4 = 24)$ - இதை நீளம் - [உய = (20)]ல்
 மாற = சாஅய = $(24 \times 20 = 480)$ இதைக்கல் - உ (2)ல் மாற கூகய =
 $(480 \times 2 = 960)$ இதை பணமாகிய - உய = (20)ல் மாற = யகூஉா =
 $(960 \times 20 = 19200)$ இதை முன்னிருத்தின - அய = (80)ருக் குக்க
 ஈய்வு விலை உயச - பொன் ஆதலால்:—

உயச பொன் = $[(\frac{19200}{80} = 240)$ இதை ஒரு பொன்பணம் 10ல் வகுக்க வேற்படும்

பொன்னுக்குச்சமம் = $(\frac{19200}{80 \times 10} = \frac{19200}{800} = 24 = \frac{240}{10})$]

= 24 (பொன்) என்பது:—

விருத்தம்:—

உன்னிதமா முளப்படுத்தாட உன்னுன்கு
உற்றகன மூன்றாக வுயி(ய) ரந்தகல்லை
அன்னியமாய் நீளமறை—அகலந்தானும்
அவ்வடைவே கனமு முறவதுவேதென்னில்:—
சொன்ன முழந்தனைச் சாணய்த்தொகுத்து மாறித்
தோண்டுகல்லு விரலாழுத்து கையைத்தாக்கி
பின்னிரையில் விர(லா)வாக்கிமூன்று - பெருக்கி
யிவர்க்கீயந்து - துகைபேசுவிரே = (36)

என்பது:—

விரித்துக் காட்டல்:—

ய (10) முள நீளத்திலே - ச (4) முளவகலத்திலே க (1) முளக்கனத்திலே - கல்
(க=1) இதை அறை முளநீளம் அறைமுள அகலம்-(இ=½) அறை முளக்
கனம் - துண்டுபண்ண யெத்தனைத்துண்டு காணுமென்றால்:—

[ய = 10] முளத்தைபுஞ்சாண்படுத்த = (உய) = (10 × 2 = 20), (ரண்டுசாண்
ஒரு முழம் வீதம்) ச (4) முளத்தைபுஞ்சாண்படுத்த - அ = (4 × 2 = 8)
இதனுடனே - உய (20) ஐ மாற - ஈகய (8 × 20 = 160)- என்று வைத்து:-

கனம் முளம் - க (1) க்கு சாண் = உ (2) - சாண் - க (1) று விறல் = யஉ (12)
ஆ விறல் = உயச = (12 × 2 = 24) இதை முன்னிருத்தின-ஈகய
(160)ல் மாற ஈசு அாசய = [(160 × 24) = (3840)] இதனை (க = 1)ல்
மாற-ஈசு அாசய = (3840) என்று நிருத்தி:—

நீளம் முளம்-(இ = ½) று சாண் (க = 1) று விறல் = (யஉ = 12). இதனைக்
கல்முளம் (இ = ½) று சாண் (க = 1)ல் மாற-(யஉ = 12). இதனை
முன்னிறுத்தின - ஈசு அாசய (3840)க்குக் குடுக்க ஈயவு = [(ஈயஉய)
= (3840)
12] = (320)]. என்பது.

முந்திறி முதலாய் ஒன்றின்வறை துகை மொளிய வென்னில்:—

விருத்தம்:—

வந்திடு மொன்றே முன்னி
திருவதாய் வருத்துதற்கே
சுந்தரமாகரற்றினச்
சுருக்கத்தைப் பெருக்கிமானே—
சுந்த முந்திறியில் வைத்தே
செப்புநீ இவை கடனே = (37)

வது (முந்திரி) முதலாய்க-வறைக்கும் (முந்திரி முதல் ஒன்று வறைக்கும்) = $\frac{1}{32}$ முதல் 1 வறை) பெத்தனை பென்னில்:—

(க)று-வது-நாடல் (ஒன்றுக்கு முந்திரி பென்பது முன்னுற்றிறுபத்தில் ஓர்பங்கு அதாவது இதன் = $\frac{1}{32}$). ரெற்றினர் சுருக்கந் தாக்க-நுய-க-சு—நாசுய-இதை - வது-ல் களிக்க — நாசுய - இ - \therefore வது-முதல்-க-வறைக்குந் துக்கை-நாசுய இ = $(160\frac{1}{2})$ என்பது:—

கட்டளைக் கவிப்பா:—

ஒரு பத்தே யடி ஓடி பின்னறினிலுற்ற
மீளுங் குதிறைக்கே தான் விலை—
தருவரஞ்சபொன்-னெட்டடியோடியே
தருகியஞ் சடிமீள பரிக் கேத்தபொன்-
(வளுத்துவதே தனில் முன்மொளி ரெண்டொன்றாய்
வைத்த பின்னு(தா)தம்படியாகவே அருமையாம்)
பொன்னுடன் மாறி முன்னவர்க்
காணுமீயவை யறைந்திடவேணுமே = (38)

ii (10) அடி ஓடி-சு (6) அடி மீளுகிற குதிறைக்கி விலை ரு பொன் = (5 பொன்)
ஆ - அ (8) அடி ஓடி-ரு (5) அடி மீளுகிற குதிறைக்கி எத்தனை பொன்னென்னில்:—

iii (10)ம்-சு (6)ம்-யசு (16) என்று திருத்தி-பின்-அ (8)ம்-ரு (5)ம்-யசு = (13).
இதை அஞ்சு (5) பொன்னுகிய-(5 \times 10) = (50) = நுய-ல் மாற கூருய
(13 \times 50 = 650). இதை முன்னிறுத்தின - யசு (16)ருக்குக் குடுக்க
நயவு சயிஇழு (= $\frac{650}{16}$ = $40\frac{5}{8}$) ஆதலால் நாற்பதரையேரிக்கால் [(சயிஇழு
= $(40 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8})$ = $(40\frac{5}{8})$] பொன் என்பது:—

விருத்தம்:—

கந்தகம் வெந்தணலாயம் கருது தூத்திருவதுக்கே
வந்ததொருபலமதாக மருபடியடி சாலத்தந்திடும்—
படியொ(யோ)றைந்து-தாத்திராலன்று (திராலான்று)
மூன்று-உந்திய நலமுமேழு (வொ) மொன்பது
மென்பதாமே— (39)

கொச்சகம்:—

நாலொன்ம (ப) தாங் குள்ளை
நவிலுமதி னவ்வளவும்—வலுவையிற்பாதி
எற்றந்த பாதியனுகூல
முன்னுறைத்த குரு
(க)கொன்றுமே கூடச்சா(ல்)லு
நூருனதென்று சாத்தியது மெய்யாமே = (40)

வெண்பா:—

பத்துமநிருடையப் பார்வேத்தன் கோட்டைக்கி

வைந்தமநிநிடை (யி) லே வாசலாம்—

அத்திரீர்-உண்ணும் போதேகில்-

(ஒய்று) ஒண்ணுமுதல்ப்

பத்தளவு மென்று

நீரே மாண்டிருந்து = (41) என்றது.

முதல் வாசல்வறைக்கும் யானை-உசுருடைய (2520) என்பது—

வெண்பா:—

கன்னல்மொளி ஒன்பான்காச துவமேயாகத்

தின்னவர்கா (ளெ) ன்னவில் செப் பவே—

கன்னல்மொளி (ஓரொன்பதென்பதின் படியடி.)

த்துகையதற்கே - ஓரொன்பதை ஈய் துறை = (42)

என்பது.—

க (1) முதல் கூ (9) வரைக்கும் படியடித்துகை-சுமீடு = (45) - இதற்கு - கூ (9)

குடுக்க ஈய்வு (சுடி = $\frac{9}{45} = \frac{1}{5}$) ஆதலால்:—

கொருத்தாடைச்சி [அ = (8) = ?] தண்டுத் த (அதனடித்த) மொளிக்கி—

இந்தப்பு மொளி (ழி) க்கு மொளி - சுடி (= $\frac{1}{5}$) அதியர் (அதிகம்) கூட்ட

கூக (9-9) சரி:—

விருத்தம்:—

நூருட னுடாமாரா(ற)னுவன்றி நூறுக் கதான்-

கூழ்பதானமூன்றய் கொண்டிருவரைக்கும்-

ஆரிலிலொன்று நீக்கலஞ்சு முன்னதுகையறித் தெரிய

வஞ்சத்தானம் செப்பிடிற் குளிப்பத(மா)மே = (43)

என்பது:—

௪௫௪ எத்தனை (=100×100=?) பெண்ணில்:— க - ல - ஈ - ஆ தானம் - ஈ

(3); மத்த நூறுக்குத் தானம் - ஈ (3) - ஆ தானம் - கூ (6) - க (1)

போக - நீ ருத்தானம் - ரு (5) - விருத்தி ௪.௫ இனம் - கூ = (1), மற்ற

நூறுக்கும் இனம் (க-) = (1); மாற - க - க - இதை விருத்தி ரு (5)

மட்டும் நடத்த:—

— க - ல - ஈ - கூ - யித - ஆதலால்:—

௪௫௪: யித = (100×100=10000) என்பது—

தாளிசை:—

நாலஞ்சனில்மாகாணி இவற்றெ (இவற்றே) வருலக்கம்—

நவமாகவேதன்னை - மாருவா நவியாவண

மிந்தக்கோல்(வ)சரி - வீசந்தன்னை—

மேல்கொண்டது சரியாய்க் குணமாமிருபத்துமே—

யதிலித்த வாக(வே)தாக்கி

யாவருசரிவளிமாதை

முன்னறிவாகிய வீசத்தைங்கா லொருவகை யென்று

கையன்றிமேலஞ் ஞுலெனத்தானொரு—

வீசந்தனைமாறி வேண்டுந்துகை ஒன்றாகவே—

விளத் (விள்ளத்) துணிவீரே— (44)—

என்பது;—

யுகனாரு யுகனாரு குழி = $(19\frac{1}{16} \times 19\frac{1}{16}$ ரு. குழி) யெத்தனை பென்றால்:-
 யுகனாரு $(19\frac{1}{16})$ யுடனே ய $(\frac{1}{16})$ கூட்ட— உயி $[(19\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) = (20)]$
 உயி. ரு உயி: சா = $(20 \times 20 = 400)$ —ல் உயி. பூ: உஇ = $(20 \times \frac{1}{8} = 2\frac{1}{2})$
 தள்ளி ய. ரு. ய: ஷதகூவ = $(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64})$ கூட்டி. நாகூயி இ ஷதகூவ
 = $[(397 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{128}) = \{(397) + \frac{(640 + 4 + 1)}{1280} = (645)\}]$
 = $(397 + \frac{129}{256}) = (397\frac{129}{256})$ என்பது.—

—(வேறு)—

கட்டளைக்களிப்பா:—

வட்டரனை நிலம் அளக்கும் வகைக்கு :— விபரம்:—

வட்டமனை நிலமளக்கும் வகை வள(ழு)த்துவேன்

காணிக்கா? முன்னதாகவே தொட்ட கொலொரு

நூறுடனன் பதா (150)ய்த் தொகுத்த

கோலஞ்ச விச $(\frac{5}{16})$ = ஐவிச)த்துளாக்கியே

இஷ்டமாகத்தனைத்தன்னில் மாறியே

யெத்த மாங்குளி இன்னவை யென்று தான்

சட்டமாயுறை வட்டமும் விட்டமே

சாற்று மூன்றொருநூல் மாலை யெண்ணியே = (45)

ஷ. மூன்றொருநூல் பா = $[(\frac{16}{5}) = (3 + \frac{1}{5}) = (3\frac{1}{5}) = (3\frac{2}{10}) = (3\frac{2}{5})]$

என்பது :—

வட்டமான நில மளக்குமிடத்தில் வட்டச் சுத்தளவு = ராடுமி (= 150) இதை
 விட்டம் பண்ண — (வய) = $(\frac{5}{16})$ வாயில் களிக்க — $[(சயிசுதவ) = (46\frac{7}{8})]$
 = நரப்பந்தாரே முக்காலேரிக்கால் = $[(150 \times \frac{5}{16}) = (46\frac{7}{8})]$
 இதைத்தன்னில் மாற — உசூராகூயி வஜுஷ = $[(2197 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32})]$
 = $2197 + \frac{(80 + 4 + 1 = 85)}{320} = 2197 + (\frac{17}{64}) = [46\frac{7}{8} \times 46\frac{7}{8}] =$
 $(\frac{140625}{64}) = (ஷ = 2197\frac{17}{64})$ இதை—ய— (= $\frac{1}{16}$) வாயில் கழிக்க—

$$\begin{aligned}
 \text{நாட்டிய வயறுவது} &= [(2197 \frac{17}{64}) (\frac{1}{16})] = [(\frac{1}{16} \times 2197) + (\frac{17}{64} \times \frac{1}{16})] \\
 &= [(137 \frac{5}{16} + \frac{17}{1024})] = (137 + \frac{5}{16} + \frac{17}{1024}) = [(137) + \\
 &+ \left\{ \frac{(320 + 17) = (337)}{1024} \right\}] = [137 \frac{337}{1024}] = \text{பு} [(137) + \\
 &(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{80} + \frac{1}{320})] = [(137) + \left\{ \frac{(80 + 20 + 4 + 1) = (105)}{320} \right\}] \\
 &= \left\{ (137) + (\frac{105}{320} = \frac{21}{64}) \right\} = 137 \frac{21}{64} = (137 \frac{337}{1024} \approx 137 \frac{21}{64}) \\
 &= (137 \cdot 328125)
 \end{aligned}$$

$(\frac{21}{64}) =$	(0·328125)	நபம் வித்யாசம் பலம்சமமே
$(\frac{337}{1024}) =$	(0·328125)	

$$\therefore [137 \frac{21}{64} = 137 \frac{337}{1024}]$$

$$\begin{aligned}
 \text{இதை வது } (\frac{1}{2} \frac{1}{10}) \text{ வாயில் களிக்க - வரி சு வது கி வயறுவது} &= \\
 &= [(\frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{640} + \frac{1}{1280})] \\
 &= \frac{(25600 + 15360 + 2560 + 320 + 80 + 20 + 4 + 1)}{102400} = \frac{43045}{102400} \\
 &= \left(\frac{8789}{20480} \right) = \left\{ \frac{1}{2 \cdot 330185 \frac{4036}{8789}} \right\} = (A).
 \end{aligned}$$

என்றாகின்றது:—

கேவலம் தமிழ் லக்க (பின்ன) மின்றியே கணிதத்தை நோந்தது:—

$$150 \times \frac{5}{16} = \frac{750}{16} = \frac{375}{8}.$$

$$\left(\frac{375}{8} \right)^2 = \left(\frac{140625}{64} \right) = 2197 \frac{17}{64}$$

$$\frac{140625}{64} \times \frac{1}{16} = \frac{140625}{1024} = 137 \frac{337}{1024}.$$

$$\left(\frac{140625}{1024} \times \frac{1}{320} \right) = \left(\frac{140625}{1024 \times 320} \right) = \left(\frac{140625}{327680} \right) = \left(\frac{28125}{65536} \right);$$

$$\left(\frac{28125}{65536} \right) = \left\{ \frac{1}{2 \cdot 33017 \left(\frac{-3125}{28125} \right)} \right\} = (B) \text{ என்றாகின்றது.}$$

ஆதலால் இங்கு மேலே காட்டிய (A) க்கும் (B) க்கும் உள்ள தாரசமம்யங்
களைப்படுத்தியவர்கள் அவசியம் ஆலோசிக்க வேண்டியதாகும்]—

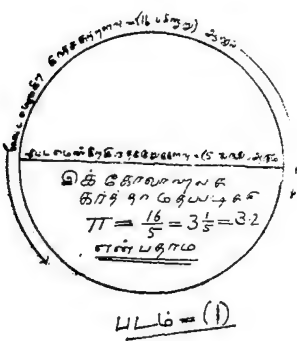
ஆதலால்:— வட்டம் - நடுநிலை - ஐயநிலை வட்டம் - ஐயநிலை - வட்டம் - ஐயநிலை
(10) ஐயநிலை பெற்றனையெனில்:— $16 \times 3\frac{1}{2} = 52$ பெருக்க-கூட்ட =

$$(32 = 10 \times 3\frac{1}{2} = 10 \times \frac{16}{5} = \frac{160}{5}) \text{ என்று சொல்வது.}$$

இவ்வி இந்த வட்டமனை வட்டமில்லும் அளக்கும் வகையில் சம்மந்தப்பட சில முக்கிய விசேஷங்களைக் கீழ்க்காட்டும் விவரணத்தில் காண்க:—

இந்தக் கணிதப் புத்தகத்தித்தாவால் சமவட்டத்தைக் கொள்ள வேண்டிய முறை:—

வட்டம் என்கிற குறுக்களவு 5 (ஐந்து) ஆகில் இதற்குரியச் சப (சுற்று) வட்டம் 16 (பதினாறு) என்றபடி கமைந்திருக்கிறது. இவ் சம்மதப்படிக்கு.



ஆகையால் தான் முன்னைய வட்டம்-10 (10) ஆனால் வட்டம் - கூட்ட (32) என்று கூற இருக்கிறது. நான்கு கவனிக்க இது புரியும்.
 $3\frac{1}{2} = 3.2 = 16 \div 5$ ஆனால் வட்டம் - 1க்கு வட்டம் மூன்றுடன் கூடிய நான்கு என்பதை மனது விளக்குகிறார் நான்கு.

$$(\therefore \text{நான்கு} = 16 = \frac{1}{5} = \therefore 3 + \frac{1}{5} = 3\frac{1}{5} = 3.2 \text{ என்பது.})$$

முதலில் கோடுகளைப்பற்றிய வகையில் கவனிக்க வேண்டியவைகளாவன:—

இந்தக்கணிதத்தாவால் கேட்க (6) விளத்ததை (விவரத்தை = குறியை) பற்றி வெகுவிளத்தமாக வர்ணிக்கப்பட்டிருக்கிறது, கணித மார்க்கத்தில் இதற்குப் பற்பல உதாரணங்களுக்கும் காட்டியிருக்கிறார். நீண்ட சதுரச்சம் பந்தமாகவும், சபச்சதுரச்சம் பந்தமாகவும், இவ்வத விசாலங்கள் அடியோடியல்லாமல் கேவலம் திர்க்கமாக இருக்கும் கேட்கத்ததைத்தான் கோடு (பேகை) என்று சொல்வது உலக இயல்பு. இந்த பேகைகள் இருவிதப்படும். ஸமமென்றும், வக்ரமென்றும்: ஸமமென்றால் நேராகப் போவதும், வக்ரமென்றால் (கோணலாக) வளைந்து போவதுமாம்.

நேராகப் போகும் கோட்டைச்சார்ந்தவைகள் ஸமகேதங்களும், விஷமகேதங்களும்: இதற்குள் முக்கோண கேதத்திமுதல் பல கோண கேதங்கள் பாய்ந்தம் இஷ்டப்படிக்கு அடங்குகின்றன.

வக்ரமாக (கோணலாக) போகும் கோட்டை யனசரித்ததுத்தான் வட்டமனை, வட்டமில்லும் முதலிய விருத்தகேதங்கள், இந்த வட்டத்தில் நீண்ட வட்டமென்றும், பூர்ணச்சம் வட்டமென்றும், அறை முதலிய பலவித வட்டங்கள் உருவத்தில் வெவ்வேறு விதமாக நம்மால் காணப்படுகின்றது. குறவுகள்; வண்டிச்சக்கரம், பந்து முதலிய; வட்ட (கோல) இனத்தைச் சேர்ந்தவைகளே.

இந்த வட்டசர்ப்ப்தமான விசாரங்கள், பூர்வகாலத்திலே நுந்தே வெகு சூக்தம் மாக; ஆர்ப்பட்டி, வராகமிகர் - துரியன் வியாஸர் வலிஷ்டர் - பாசரர் முதலிய மகான்களால் தொன்று தொட்டு நன்கு விளக்கப்பட்டு வருகிறது:

இவர்களால் விட்டம் - (20000) ஆனால் வட்டம் (62832) என்று நிச்சயிக்கப் பட்டிருக்கிறது.

இவர்கட்கு விஜேதமாக ஸ்ரீதர் முதலிய கணித பண்டிதர்கள் விட்டம் ஒன்றானால் இதற்குச் சுற்றளவாகிய வட்டம் பத்தின்வர்க்கமுலம் $\sqrt{10}$ என்கிறார்கள்.

$$(10\text{ன் வர்க்கமுலம்}) = \sqrt{10} = 3.1623$$

$$\text{ஆர்ப்பட்டதியர் வட்டம்} = 3.1416$$

$$\text{இவற்றின் வித்தியாசம்} = 0.0207$$

$$(\text{இத்தக் கணிதகர்த்தாவின் ஒன்றான } \left. \begin{array}{l} \text{விட்டத்தின் வட்டப் பரிமாணம்} \end{array} \right\} = 3.2000$$

இப்படிப் பூர்விகர்கள் காலத்திலேயே விட்டத்துக்குரிய வட்டத்தைப் பல வித்யாசத்தோடு வழங்கிக் கொண்டார்கள். ஆனபோதிலும் கணிதப்பலவ ரூப்ய - பாஸ்கர் முதலியவர்களால் விட்டம்-1-ஐ வட்டம் (3.1416) என்றே அங்கீகரிக்கப் பட்டிருக்கிறது. இந்த ($\pi = 3.1416$)ஐ யனுசரித்தே நவீனர்களின் கணிதங்களும் லாகரிதும் முதலிய நவீன அளவு முறைப்படிக்கு சூக்தம்மாகச் சாதனஞ் செய்யப்பட்ட ஓர் விட்ட வட்டம் = (3.1415926535897932) = π .

இந்த விகித சார்பத்தைக் கொண்டே த்ரிகோணமிதி முதலிய-வான கணித உபகண கணிதங்களையும் உடத்திவருகிறார்கள். (கோலகணிதத்துக்கோ இந்த ஷெ π தார் மூலதாயமாகும். இதுவின்மயங்கு, ஏதும் நீகழ்த்தலே முடியாது)— த்ரிகோணமிதியிலும் ஸைல (ப்லேன்) த்ரிகோணமிதி, சாப (ஸ்பெரிகல்) த்ரிகோண மிதி யென்று இருவிதம். இவைகட்குரிய கணித உபகரணங்கள்.

- (1) புஜஜ்யா = ஸைன் (SINE)
- (2) கோடிஜ்யா = காஸ் (COSINE)
- (3) உத்தர்மஜ்யா = வர்ஸ் (VERSED SINE)
- (4) கோடியுத்தர்மஜ்யா = குவர்ஸ் (COVERSED SINE)
- (5) ஸ்பர்ச்சரேகா = டான்ஞன்டஸ் (TANJENT)
- (6) கோடிஸ்பர்ச்சரேகா = கோடான்ஞன்ட (COTANJENT)
- (7) ஸ்பர்ச்சகர்ணம் = ஸீக்கன்ட் (SECANT)
- (8) கோடிஸ்பர்ச்சகர்ணம் = குஸீக்கன்ட் (COSECANT)
- (9) புஜஜ்யோஜ்யாகர்ணம் = கார்டு (CHORD)
- (10) கோடிஜ்யோஜ்யாகர்ணம் = குகார்டு (COCHORD)
- (11) புஜ; கோடி; கர்ண; கோலஸத்தி = வர்ட்டக்ஸ் (VERTEX)

என இப்படிப்பல அவயவங்களுள்ளவைகளாக இருக்கின்றன—.

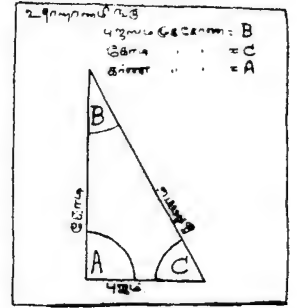
எப்போ ஓர் கர்ணம் வர்படுகிறதோ இதற்கு அறை விட்டத்தையுடைய ஓர் வட்டம் அவசியம் ஏற்பட்டேயிருக்கும். கர்ணமேற்பட்டபோது புஜகோடிகளு மிருக்க வேண்டியதாகிறது. இப்மூன்றையவங்களும் தெரியும்போது இவை களின் பரப்பை ஸம்பாத, ஸம்முக, கோணங்களும் உண்டாகின்றன. ஆனால் இவைகளில் சில தெரிந்தவைகளும், சில தெரியவேண்டியவைகளுமாகவே இருக் கும். இதற்காகவேதான் ஸகலகணிதப்பஞ்சமும்.

மேற் கூறிய உபகரணங்கள் கேவல ஸில் மீட்டர் ரூபமான ஜ்யாமீதியில் அமையும் போது அந்த ஜ்யா முதலிய சப்தங்கள் போய்-கேவலம்-புஜம், கோடி, கர்ணம், ஸம்பாத, ஸம்முககோணம், என்ற இவைகள்தான் பெயர்கள் உடைய வைகளாக நிற்கின்றது. இந்தக் கோடுகளை அனுசரித்தே இதுவறையில் கிரந்த கர்த்தா கூறிவந்த நில அளவை வட்டம் முதலிய கணித விதங்களும்.

இப்படிச் கண்ட கோடுகளின் ஒரு பக்கக்கோடு புஜமும் இதற்கெதிர்த் கோடு கோடியுர், இவ்விரு தூணிகளின் ஸம்பாத சேர்க்கைக்கோடு கர்ணமும், ஆக அழைக்கப்படுகிறது.

இப்படத்தில் கண்ட $AC =$ புஜம், $AB =$ கோடி $BC =$ கர்ணம், எனப்படும். எப்போதும் புஜகோடி களை விடக் கர்ணம் நீண்டும், கர்ணத்தை விடக் (கோடி புஜக்கூடல்கள் (கோடி + புஜம்) அதிகமாகவே இருக்க வேண்டியதாகின்றது நிரந்தரையே — இல்லையேல் உருவடிமைவதில்லை.) $\therefore (கோடி + புஜம்) >$ கர்ணம்.

இவ்வித உருவைச் சார்ந்த சில விசேஷ கணி தங்களை (இந்தக் கணிதக்கர்த்தாவால் விடப்பட்ட சில விசேஷங்களை), வட்டச் சம்பந்தமான கணிதம் முடிந்த பின்பு கூடியவறையில் வெகு சுருக்கமாகக் கூறுவோம். இவைகளில் விசேஷங் கள் வெகுவாயுள்ளன மாத்திரம் கணிதத்தில் காட்டப்படுகிறது.—



நூதனக்கணித அளவுமுறைப்படிக்கு லாகரிதும் (காதார்க்கம் = லகுரித்தம்) முதலியவைகளால் நவீனர்கள் ஏற்படுத்தப்பட்ட (π) யின் விவரம் (3.1415926535897932) என்கிறபடிக்காகும்.

விருத்தார்யப்பட்டால் செய்யப்பட்டதும் பெளருஷக்கிரந் தங்கட்க்கே முதலாவதுமான நான்கு பாதங்களைக்கொண்ட ஆர்யபட்டியம் என்கிற மூலக்கர்த்தத்துக்கு ஒருவர் (வியாக்கியானம்) வெகு விமர்சன விஸ்தாரமுள்ள உறை செய்திருக்கிறார்.

இப்புத்தகத்தின் காப்பி தற்சமயம்: அடையார் அளிபெஸன்ட் லைப்ரரியில் தெலுங்குமூத்தில் ஸம்ஸ்கிருத பாஷையில் ஓர் காப்பியும், தேவநாகரியில் ஸம்ஸ்கிருத பாஷையில் ஓர் காப்பியும் ஆக இரண்டு காப்பிகள் இருக்கின்றன—முதலில் சொன்னது சிதிலமாயிருப்பதால் இரண்டாவதைப் புதிதாகக் காப்பியும் எடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. (அதில், உள்ள ஸம்ஸ்கிருத பாஷைக்கு நேர் செய்த தமிழ்)

—அந்த உரைக்கு பாஷ்யம் என்கிறபெயர்—இதற்குக் கர்த்தா “நீலகண்ட ஸோம ஸுத்வா” என்கிற பேருடைபார். இவர், திருக்கணித கர்த்தாவும் ஆர்ப்பட்டிய மற்றோர்ப்பாக்யான மாகிய படதீபிகா கர்த்தாவுமான ஸ்ரீபரமேசுவரசார்யர் தனயன்; தாமோதரபண்டிதரின் சிஷ்யர், ஸ்ரீ குண்டம் என்கிற கிராமத்தில் வஸித்தவர். கார்க்கோத்திரத்தில் பிறந்தவர், இவர் காலம் சுமார் A. D. (1450 to 1550) இந்த நீலகண்ட ஸோமஸுத்வா என்பவர் சொல்லுகிறார்:—

ஸங்கம கிராமத்திலிருந்தவருகிய “மாதவன்” என்பவர் மிக்க சூக்ஷ்மத்துக்குச் சமீபமாயிருக்குந்தன்மை வாய்ந்த “பரிதி” (சுற்றளவைச்) சொல்லுகிறார் என்கிறார்:—

அப்படி அந்த மாதவன் என்பவர் சொல்லும் பரிதியை வோவென்றால்:—

இங்கு வ்யாஸம் = நவபிகர்வம். இதற்குச் சமம் = (900000000000) ஆகும், இதற்குப்பரிதி என்கிற சுற்றளவுக்குச் சமம் = (3827433388233) இதுவாகும்

$$\left(\frac{\text{பரிதி}}{\text{வ்யாஸம்}} \right) = \left[\frac{\text{வட்டம்}}{\text{கூட்டம்}} \right] = \left\{ \frac{3827433388233}{900000000000} \right\} = \pi = (\text{பையளவு})$$

 = (3.14159265359 $\frac{2}{3}$). இவ்விதம்; நீலகண்ட ஸோமஸுத்வா சொல்லிய மாதவன் என்பவர்; பண்டிதர்கள் ஷே யளவுப்படி சொல்லுகிறார்கள் என்கிறார்.

நீலகண்ட ஸோம ஸுத்வா காலம் = (AD-1450 to 1550) இதற்கு முன் மாநவ பண்டிதர் காலம் எப்போ என்பது தெரியவில்லை இவ ருக்குபதேசித்த ஸ்ரீபத்யத்துக் குறிய கர்த்தாவும் எந்த காலத்தில் என்று விளங்கவில்லை. ஆகையால் (ஷே π = 3.14159265359 $\frac{2}{3}$.) என்பது. ஆர்ப்பட்டர்காலம் (AD = 500) இதற்குப் பிறகு (AD = 1500) இதற்கு முந்தியுள்ள காலத்தில் எற்பட்டிருக்க வேண்டும். இந்த மத்தியிலுள்ள (1000) ஆயிரம் வருஷத்தில் வெகு கணித ஸமர்த்தர்கள் இருந்திருக்கிறார்களிற்கு என்று ஏற்படுகின்றது.

இதனால்:—

ஆர்ப்பட்டர்; வராஹமி ஹிரர் முதலியோர் காலத்திய விட்டத்துறியவட்டம்

$$= \frac{62832}{20000} = \frac{3.1416}{1.0000}, = (\pi) \text{ என்றும், இதற்குப் பிந்தி (அதாவது}$$

AD = 500 to 1500) ஆகிய, இந்தக் காலத்தில்:—

$$\pi = \left(\frac{3827433388233}{900000000000} \right) = \left\{ \frac{(3.14159265359\frac{2}{3})}{(1.000000000000)} \right\}$$

 = (3.14159265359 $\frac{2}{3}$) என்றும் ஏற்படுகிறது:—

சுமார் (AD 1550)க்குப் பிந்தி மேல் நாட்டர் கீழ் நாட்டார் முதலிய பல நவீனர்களால் நவீனகணித அளவு முறைகளைக் கொண்டும் ஷே (π)யை இவர்கள்:—

$\pi = 3.1415926535897932 \dots \rightarrow \dots$ என்கிறார்கள் :—
இவர்கள் சம்மதப்படி ஷேக்கு ஸ்தானம் இவ்வளவுதான் இன்னும் மேலும் முண்டா என்றால்:— இதனுடைய ஸ்தானத்துக்கு முடிவான அளவே கிடையாது. (—→) இவ்விதக் குடியிருந்தால் முடிவின்றிச் செல்வதேயே காட்டும்.

இங்கே ஷே ($\pi = 3.1415926535897932 \rightarrow$) ஐ இதற்கு மேலும் சொல்லாமல் ஏனிங்கு இதுபரயந்தம் நிருத்தினாய் என்று கேள்வியும் எழும்புகிறது. இதற்குத் தக்கச் சமாதானம் யாதென்றால்:—

$$\begin{aligned} \text{ஆர்ப்பட்டாயர் சம்மத ஒரு விட்ட வட்டம்} &= 3.1416 \\ \text{மூத்தாயர் சம்மத ஒரு விட்ட வட்டம்} &= 3.16228 \\ \hline \text{ஷே இரு மதங்களின் வித்யாஸம்} &= 0.0207 \end{aligned}$$

இக்கோலாகலக்கர்த்தாவின் சம்மதப்படிக்கோ ஒரு விட்டகின் வட்டம் = 3.2 என்பது. இவைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்றுக் கொன்று வித்யாஸமாக இருப்பது போலவே நயினர் கலுக்கு வெகு சம்மதமாக இருக்கும் இந்த $\pi = (3.1415926535897932 \rightarrow) = 180^\circ$ க்கு; இவ்வித மேற்பட்டதற்கும் கணித மூலமுண்டு. இதன் பலவிகித விவரணம் சுருக்கமாகக் காட்டப்படுகிறது.

MACHIN (மேஷின்) மதப்படி கற்பனை

அதாவது:—

$$\therefore (4 \text{ ஸ்ப}^{-1} \frac{1}{5} - \text{ஸ்ப}^{-1} \frac{1}{25}) = \frac{\pi}{4} \text{ இதற்குலாகரிதும் படிக்கு ஏற்படுஞ் சமீகரண ஸகுத்தம்:—}$$

இங்கு ($\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$) எனக் கொண்டால்:—

$$\left[16 \left\{ \frac{1}{1} \left(\frac{2}{10} \right)^1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{10} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{10} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{2}{10} \right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{10} \right)^9 - + - + - \rightarrow \right\} \right. \\ \left. (-4) \left\{ \left(\frac{1}{5} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{5} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{2}{5} \right)^7 + - + - \rightarrow \right\} \right]$$

$$\text{இங்கு வந்தஸர்வதன எண்} = 3.201025 \dots$$

$$,, ,, ,, \text{ருண எண்} = -0.59433 \dots$$

$$\text{ஷே இரண்டின் வித்யாஸம்} = 3.141592 \dots \rightarrow = \pi = 180^\circ \text{க்கு.}$$

இவ்விதம் (டான் 30°) = 57735 = ($\frac{1}{3}$) $^\frac{1}{2}$ இதையும் லாகரிதும் படி ஸகுத்த ஸமீகரணஞ் செய்ய:—

$$\left\{ \left[\left(\frac{1}{3} \right)^\frac{1}{2} \right]^1 - \left[\left(\frac{1}{3} \right)^\frac{1}{2} \right]^3 + \left[\left(\frac{1}{3} \right)^\frac{1}{2} \right]^5 - \left[\left(\frac{1}{3} \right)^\frac{1}{2} \right]^7 + - + - + \rightarrow \right\} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\therefore \pi = (6 \times 0.5235988) = 3.1415928 \dots \rightarrow = 180^\circ$$

மேலே காட்டிய இருவித வழிப்படிக்கும் ($\pi = 3.14159 \dots \rightarrow$) ஐ சில ஸ்தான பரயந்தம் கணிதம் செய்ய ($3.1415926575897932 \dots \rightarrow$) என்றேற்

படுகிறது. இதற்கு மேல் ஷை இரூபித- வழிகளின் விடைகளுந் தாரதர்ய மடைசின்றது (கணிதவிஷ்ணுராயத்தால் அல்லவாறு பாயத்தந் கணிக்காயல் மூலவழிபைமாத்நிரமங்கிரகரிமயது.) அந்நிதந்நிபயலமயபைநாநன்ன வர்கள் மடற்கபிழா வழுதிடி பைநாந்நிபயலமயபைநாநன்ன ஷை வித்பா ஸத்தந்நிதந்நிபயலமயபைநாநன்ன இவ்விதந்நிபயலமயபைநாநன்ன — பூவிக்கக் காலைநில், விட்டக் கிடைத்தல் மயபைநாநன்ன பூவிக்கக் கிடைத்தல் மயபைநாநன்ன இவ்விதந்நிபயலமயபைநாநன்ன — காட்டிப இரூபித வித்பைமயபைநாநன்ன வித்பைமயபைநாநன்ன (கணிதவிஷ்ணு) வித்பைமயபைநாநன்ன பதந்நிபயலமயபைநாநன்ன இவ்விதந்நிபயலமயபைநாநன்ன வுத்பைமயபைநாநன்ன கேற்படும் வித்யாஸத்தைக் கண்டு பிடித்துக் கூறியது முதல் நால்தான். இது சுமார் (AD = 1940ல்) என்னால் கண்டறியப்பட்டதாகும்.

இந்த (π) பரிமாணம்-கணிக்க மூன்றும் வழிமுண்டு:—

கேவலம் புஜஜயா (ஸைன் 0) விஸ்தரித்த லாகரிதும்படி கண்டறியப் படுகின்றதாகும்:—

இங்கு $(\sigma) = \text{ஸை } 30^\circ = \frac{1}{2}$ ஆனால்:—

$$\pi = 6 \left\{ x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} \cdots \rightarrow \right\}$$

இங்கு:— $\theta = \frac{1}{2} =$ னை 30° க்கு

$$\therefore \frac{\pi}{6} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2} + \dots \rightarrow \right\}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \times 6 = \pi = (3.14159265 \dots \rightarrow) \text{ ம் வரும்.}$$

இதுபோல் ஷ. ஈ ஐக் கணிக்க இன்னும் பலவார்களும் உள்ளனர்.

தற்சமயம் இரக்கணித உபகரண சாதனங்கட்கு இந்த π (பை) யை = 3.1415926535897932...இந்தஸ்தானத்துக்குமேல் கொண்டு கையாண்டதாகத் தெரியவில்லை. தற்சமயம் புழக்கத்தில் ப்ரசித்தமாக இருக்கும் சேம்பர்ஸ் மேதமேடிகல் டேபிளைக் கண்டவர்கட்கு ($\pi = 3.1415926536$) இந்த ஸ்தானத்துக்குமேல் கையாளவில்லை என்பது நன்றாகத் தெரியும். டேபிலுக்குட்பட்ட ஸைன் முதலிய (வானகணித) உபகரணங்களும் (7பிகர்) ஏழுஸ்தானத்துக்குமேல்லை. ஒன்பது ஸ்தானத்தில் அறைகுறையுடன் எங்கேயோ சிற்சில விடங்களிலிருப்பதாகச் சொல்லிக்கொள்கிறார்களே தவிர நேறில் கண்டோர் யாரும்மில்.

தற்சமயம் உபயோகத்திலிருந்து வாக்குடியில்.

$\pi = \left(\frac{\text{வட்டம்}}{\text{வட்டம்}} \right) = \frac{3}{1}; \left(\frac{16}{5} \right)^{22, 333, 355, 103993} \frac{7, 106, 113, 33102}{3, 14159265359 \dots} \rightarrow$
இவைகள் மூன்றுக் கொன்றைவிட சூக்ஷ்மங்கள் (சுத்தங்கள்) ஆகும்.

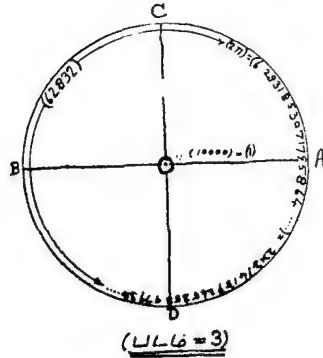
$$\left\{ \frac{31416}{10000} \right\} = \text{செ } \pi = \left(\frac{\text{வட்டம்}}{\text{வட்டம்}} \right) \text{ ஐக் கொண்டு கணிக்கவேண்டிய.}$$

வட்ட உருவக் கணிதங்கள் விவரிக்கப்படுகின்றது.

ஆரியபட்டரில் நிச்சயிக்கப் பட்ட. $\left\{ \frac{\text{வட்டம்}}{\text{வட்டம்}} = \frac{62832}{20000} = \frac{3927 \times 16}{1250 \times 16} = \pi \right\} \therefore$

பாஸ்கார் மதப்படிக்குறிய $\left\{ \frac{\text{வட்டம்}}{\text{வட்டம்}} = \frac{3.27}{1250}, \right\} = \left\{ \frac{3.1416}{1.0000} \right\}$ தற்சமய உலக வழக்கிலுள்ளவை யிவைகளே.

(1) ஸமவட்ட கோந்தரகணிதம். (சிலகிவரம்) இங்கு $(\theta A) =$ அறை விட்டம் = 10000 \therefore ஆல் $\odot = (ADBC) = 62822$ ஆகும். $(AB) =$ விட்டம் = முழுவிட்டமானால் $\odot = (ADBC) = 31416$ என்றாகும் $(AB) = 1 =$ ஒன்றாகக் கொண்டால் $\odot = (ADBC) = \left(3 \frac{1415926535897932}{10000000000000000} \dots \right) = 3.1415926535897932 \dots \rightarrow$ என்றாகும் இவ்விட்டம் போல் கொள்க ($\dots \rightarrow$) இக்குறிப்பு முடியாபல் (சுணிக்கும் எண்கள்) போவதைக் காட்டும்.



வினாவிடைகள் இதைப்பற்றியவைகள்:—

(கஜம் = 12) குறுக்களவு (விட்டம்) உள்ள துறவுக்கு (கிணற்றுக்கு) சுத்தளவு என்ன, விஸ்தீர்ண மென்கிற குழி என்ன?

என்றால்:—

தெரிந்த விட்டத்தை (31416)ஆல் பெருக்கி (10000)ஆல் வகு; ஈவே வட்டமாகும். இப்படி வந்த வட்டத்தை விட்டத்தால் பெருக்கியதை நாலால் (4 ஆல்) வகுத்த ஈவு அந்த வட்டத்துக்குழியாம். (என்றால் வட்ட விஸ்தீர்ண மென்கிற விசாலமாகும்).

அல்லது $\left(\frac{31416}{10000} \right)$ ஐயே விட்டவர்க்கத்தால் பெருக்கி நாலில் வகுத்தாலும் வட்டக்குழி வந்து விடும். இல்லையேல் $\left(\frac{31416}{10000} \right)$ ஐ அறை விட்ட வர்க்கத்தால் பெருக்கினாலும் வட்டக்குழி வந்துவிடும். இதற்குச்சமீகரணம்:—

$$(1). \text{வட்டம்} = \left(\frac{31416}{10000}\right) \times (\text{விட்டம்});$$

$$(2). \text{வட்டக்குழி} = \frac{1}{4} \left\{ (\text{வட்டம்}) (\text{விட்டம்}) \right\}. \text{ அல்லது}$$

$$\text{வட்டக்குழி} = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{31416}{10000}\right) (\text{விட்டம்})^2 \right\} \text{ இல்லைபேல்}$$

$$\text{வட்டக்குழி} = \left\{ \left(\frac{31416}{10000}\right) \pi \left(\frac{\text{விட்டம்}}{2}\right)^2 = \text{அறைவிட்டம்} \right\}$$

தெரிந்த விட்டம் (12) பணிபண்டை (31416)ல் பெருக்க 376992. இதை (10000)ல் வகுக்க ஈவு $37\frac{6992}{10000}$; இதேதான் 12கஜ விட்டக்கிணற்றின் சுத்தளவாகும்.

$$\therefore \text{விட்டம்} = 12\text{க்கு, சுத்து அளவு} = 37\frac{6992}{10000}, \text{ என்பதாம்.}$$

வட்டக்குழிக் கணிக்கும் உதாஹரணம்:—

விட்டம் = (12) கஜம் ஆகையால் இவ்விட்ட வட்டத்தின் குழி என்ன எனவன்றால்:—

12 விட்டத்தின் சுத்து $37\frac{6992}{10000}$ இதை (ஒரே 12ன் கால்பங்கால் $(\frac{12}{4} = 3)$ ஆல் பெருக்க) ஒரே வட்டம் $37\frac{6992}{10000}$ க்குச் சபம் = 37.6992 இதை 3ஆல் பெருக்க $(37.6992 \times 3) = 113.0976$ ம் வட்டக்குழியாம்.

இங்கே படம் நாலே (4ஐ)க கவனி:—

இங்குள்ள வட்டத்தில் (O) என்பது சிறிய பெரிய இருவட்டங்களின் மத்திய தேந்திரம் (மத்தி = ஸென்ட்ரல்).

$$\text{பெரிய அறைவிட்டம்} = OB = 6.$$

$$\text{சிறிய அறைவிட்டம்} = OA = 3.$$

என்றுமுதலில் நிச்சயிக்கவும்.

பிரகாரம்:—

$$(4 \times 4) = 16 \text{ சதுர (கஜ)க் குழிக்கு வெள்ளை}$$

வர்ணம் பூச கூலி (10) ரூபாய், மஞ்சள் வர்ணம்

(பட்டம்=4)

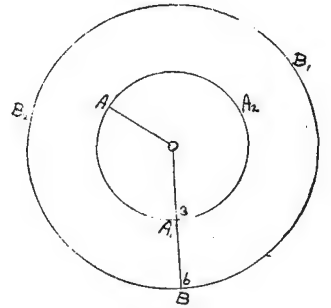
பூசக் கூலி (15) ரூபாய் ஆகையால் படத்தில் கண்ட சிறிய வட்டத்துக் குழிக்கு மாத்திரம் மஞ்சள் பூச்சும், இச்சிறிய வட்டத்துக்குமேல் மிகுதியாயிருக்கும் பெருவட்டக்குழிக்கு வெள்ளைப் பூச்சும் பூசத்தாவேண்டிய கூலிகள் எம்பாத்திரம்.

என்றால்:—

இதன் விகிதஸாய்கணிதம்:—

முன் சொன்னபடி சிறிய வட்டத்துக்கும் பெரிய வட்டத்துக்குங் குழி கணித்துப் பெரிதில் சிறிதைக் கழித்த மீதம்—(சிறியவட்டக்குழி கழித்த) பெரிய வட்டக்குழியாகும். என்பது பொதவாதத் தெரிந்துவிடு.

சிறியவட்டக்குழியின் சம்பந்தமில்லாமலே, சிறிய பெரிய அறை விட்டங் களைக்கொண்டே பெரிய வட்டச் சொச்சக்குழியைக் கணிக்கும் வழி:—



படம் 2 ஐப்பர் = (A; A₁; A₂ 0) = சிறுவட்டம்; (B; B₁; B₂ 0) = பெருவட்டம்.

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \text{(பெருவட்டக்குழியில் சிறுவட்டக்குழி)} \\ \text{குழிக்கு மிச்சம் பெருவட்டக்குழிக்கு} \end{array} \right\} \\ = \left\{ (\odot B, B_1, B_2) - (\odot A, A_1, A_2) \right\},$$

பெரிய அறை விட்டவர்க்கத்தில், சிறிய அறை விட்டவர்க்கத்தையக் குழித்த மிச்சத்தால் $\left(\frac{3 \cdot 1416}{1 \frac{1}{2}}\right) = \pi = 3 \cdot 1416$. ஐப் பெருக்குவதே பெருவட்டச் சிறுவட்டக் குழிக்குறிய அந்தர (வித்யாஸ)க் குழியாம்.

இல்லையேல்:—

பெரு அறைவிட்டத்தில் சிறு அறைவிட்டத்தைக் கூட்டுந் துகை; பெரு அறை விட்டத்திற்கு சிறு அறை விட்டத்தைக் கழித்ததுகை, (π) ஆக இம் மூன்று துகைகளையும் ஒன்றுக் கொன்று பெருக்கியதும் (முன் போல) இருவிட்ட வட்டக்குழிகளின் அந்தர (வித்யாஸ)க் குழியாம்.

குறிப்பு:— பெரு அறைவிட்டம் = (பெ. அ. வி)

சிறு அறைவிட்டம் = (சி. அ. வி) \therefore

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(பெருவட்டக்குழிக்கு)} \\ \text{சிறுவட்டக்குழிக்கும் உள்ள} \\ \text{அந்தர (வித்யாஸ)க் குழி} \end{array} \right\} = \left\{ (\text{பெ. அ. வி})^2 - (\text{சி. அ. வி})^2 \right\} \times \pi \\ = (\text{பெ. அ. வி} + \text{சி. அ. வி})(\text{பெ. அ. வி} - \text{சி. அ. வி}) \pi.$$

என்று இவ்விரு வழியிலும் விடை வருவது சமமேயாகும்.

இதற்கு இவ்ரு பெரு விட்டம் = 12 கஜம். இதன் வட்டக் குழிக்கணிக்கை $\pi \times \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 3 \cdot 1416 \times 6 \times 6$.

$$= 3 \cdot 1416 \times 36.$$

$$= 113 \cdot 0976 = \text{பெருவட்டக்குழி.}$$

$$\pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3 \cdot 1416 \times 3 \times 3$$

$$= 3 \cdot 1416 \times 9.$$

$$= 28 \cdot 2744 = \text{சிறு வட்டக்குழி.}$$

$$(113 \cdot 0976 - 28 \cdot 2744) = 84 \cdot 8232 = \text{இருவட்டக்குழி பந்தம்.}$$

இதைத்தான் சிறுவட்டக் குழிக்கு (குழியால்) மிச்சமான பெருவட்டக் குழி என்று சொல்வது வழக்கம்.—

வட்டக்கூலி விசேஷக்கணக்கிங்கு:—

—8 கஜம் குறுக்கில் ஓர்வட்டக்கிணர் ஏற்கனவேயுள்ளது; இதையே சொந்தக்கரணத்து 14-கஜம் அகலத்தில் உள்ள வட்டக்கிணறுக்க வேண்டுமென்று தோன்றியது. இவன் ஏவலால் கூலிக்காரர்கள்:—தோண்டக்கூலி—முதலாட்டிக்குச் சதாசனக் கஜக்குழிக்கு 1-கால் ரூபாயும்; மட்டு 2ல் 1; மட்டு 3ல் 1, மட்டு 4ல் 2; மட்டு 5ல் 3, மட்டு 6ல் 4, மட்டு 7ல் 5 ரூபாய்களாகிறதம் கூலி தோண்டினர். அந்நாள் தோண்டிய ஈர்களுக்குச் சேர வேண்டிய மொத்தக் கூலி ரூபாய்கள் எவ்வளவு என்னில்:—

(87ம் 88ம்) பக்கத்தில் காட்டிய விவரப்படிக்கு:—

குறிப்பு.—

பெரு அரைவிட்டம் = (பெ. அ. வி) = A

சிறு அரைவிட்டம் = (சு. அ. வி) = B

(ஒரேபக்திமிகேந்திர (ஸன்டால்) முள்ள இஷ்டமான இருவட்ட விக்யாஸக் குழி) = π (பெ. அ. வி + சு. அ. வி) (பெ. அ. வி—சு. அ. வி)
= (A+B) (A-B) (3.1416).

∴ இங்கு: 2A=14, 2B=8 ∴ A=7, B=4.

∴ (A+B) (A-B) = 11 × 3 = 33 [∴]

(மீட்டர் குறிய இருவட்ட விக்யாஸ
(பெ. அ. வி) கனகஜக்குழிக்கு) } = (33 × 3.1416) = 103.6728.
= என்று ஏற்பட்டத, இதற்குக்

கூலி ரூபாய் கணிக்கும் விவரணம்:—

(மட்டு 1 ரு கூலி ரூபாய் $\frac{1}{4}$ ∴)	கூலி	=	$103.6728 \times \frac{1}{4}$	=	25.9182
(மட்டு 2 ரு கூலி ரூபாய் $\frac{1}{2}$ ∴)	செ	=	$103.6728 \times \frac{1}{2}$	=	51.8364
(செ 3 ரு செ 1 ∴)	செ	=	103.6728×1	=	103.6728
(செ 4 ரு செ 2 ∴)	செ	=	103.6728×2	=	207.3456
(செ 5 ரு செ 3 ∴)	செ	=	103.6728×3	=	311.0184
(செ 6 ரு செ 4 ∴)	செ	=	103.6728×4	=	414.6912
(செ 7 ரு செ 5 ∴)	செ	=	103.6728×5	=	518.3640

ஆகமொத்தம் [= (15 $\frac{3}{4}$)] குக் ரூபாய்களின் = 1632.8466-ரு

இங்குவிடை = 1632.8466. ரூபாய்கள் கூலியாம்:—

இல்லையேல்:—

செ மட்டுக் கூலி விகிதம் 7ம் கூட்டிய = ($\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$) = 15 $\frac{3}{4}$ = $\frac{63}{4}$ இதை மட்டுக்குழியாகிய (103.6728) ஆல் பெருக்கினாலும் கூலி ரூபாய்களின் ($103.6728 \times \frac{63}{4}$ = 1632.8466) என்று வந்தவிடும், இது சுலபவழி.

$$\begin{aligned}
 \text{கூலி கொடுக்கவேண்டிய ரூபாய்} &= 1632.0000 \\
 \text{அணுக்கள்} &= (.8466 \times 16) = 13.5456. \\
 \text{தம்பிடிக்கள்} &= (.5456 \times 12) = 6.5472. \\
 \text{ஆக } \left\{ \begin{array}{l} \text{ரூபாய்} = 1632 \\ \text{அணு} = 13 \\ \text{தம்பி} = 6.55 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

கூலி ரூபாய்களின் = 1632-13-7 என்பதுதான் இங்கு விசேஷம்.

ஒரு அறை வீட்டின் = (பெ. அ. வீ.) = 6; இதன் வாக்க = 36

சிறு அறை வீட்டின் = (சி. அ. வீ.) = 3; இதன் வாக்க = 9

$$\text{ஒரு இருவாக்க வித்யாசமிதன்} = \underline{\underline{27}}$$

ஒரு $3.1416 \times 27 = 84.8232 =$ இருவட்டகுழி (வித்யாஸம்). யந்தரம்.

அல்லது.

$$\begin{aligned}
 &\left\{ (\text{பெ. அ. வீ.}) + (\text{சி. அ. வீ.}) \right\} \left\{ (\text{பெ. அ. வீ.}) - (\text{சி. அ. வீ.}) \right\} \pi \\
 &= (3.1416) (6 + 3) (6 - 3). \\
 &= 3.1416 \times 9 \times 3. \\
 &= 3.1416 \times 27 = 84.8232. \\
 &= \text{இருவட்டக் குழியந்தரம்.}
 \end{aligned}$$

இம்மூன்று விதவழியிலும் வந்த விடைகள் சமமே.

ஆகையால் இவ்விடமான எழுவில் கணித்தற்கு கொள்க—

இனி பூச்சுக் கூலி கணிக்க:—

$$\text{சிறு வட்டக்குழி (மேலேகணித்தது)} = 28.2744$$

$$\text{சிறு வட்டக்குழி போனபெறு வட்டக்குழி} = 84.8232$$

$$\text{ஒரு ரண்டுங் கூட்ட-12-வட்ட வட்டக்குழி} = \underline{\underline{113.0976}}$$

சதுரகஜம்-1க்கு மஞ்சள் பூச்சுக் கூலி = 15, வெள்ளை பூச்சுக் கூலி = 10
ஆகையால் சிறுவட்டக்குழி = 28.2744 ரு மஞ்சள் பூசு

$$\frac{28.2744 \times 15}{16} = 424.116 \div 16).$$

56.5072 ரூபாய் (மஞ்சள் பூச்சுக் கூலி).

$$\frac{84.8232 \times 10}{16} = \frac{848.232}{16} = 53.0145 \text{ சொச்சப்பெறு வட்டக் குழிக்கு}$$

வெள்ளை வர்ணம் பூச்சுக் கூலி ரூபாய் = 53.0145

ஆக மொத்தக்கூலி = $(53.0145 + 26.507)$.

= { ரூ. அ. பை. } என்பது.

மற்றுமீ வருவனவெல்லாம் மிப்படிக்குக் கண்டு கொள்ளவும்.—

வட்டக் குழிக்குறிய அறை விட்டக் கைவாரத்தால் (கம்பாளால்) சுற்றிலும் பெருக்கடியாகத் தொடர்ச்சியுள்ள வட்டங்கள் வரைந்தால் (செய்தால்) முடிவில் இது பந்து முதலிய குண்டு உருவம் போன்ற கன (பரிமாணமுள்ள) மண்டலங்கள் (கன வட்டங்கள்) ஆகும். இவ்வித உருவமுடைய கனவட்டங்களுக்குத்தான் கோலம் என்கிற பெயர் என்று முகப்பமாக இங்கு கவனிக்க வேண்டியது.

கோல மேற்பரப்புக்குழி (கோல கனக்குழி - முதலிய) கணிக்க:—

வட்டக்குழியை நாலில் பெருக்கக் கோல மேற்பரப்புக்குழியாகும். அல்லது அறைவிட்ட வர்க்கத்தால் (π) பையைப் பெருக்கினதை நாலி (4) ல் பெருக்கினாலும் கோல மேற்பரப்புக்குழி வந்துவிடும்.

கோலமேற்பரப்புக்குழியை விட்டத்தால் பெருக்கியதை ஆறில் வகுத்த ஈவு கோலமத்யகேந்திர (கர்ப்பகேந்திர)ாதி ஸம்மந்தமாகிற கோல கனக்குழியாம். இல்லையேல், கோல அறைவிட்டக் கனத்தால் π (பை) பையைப் பெருக்கியதை நாலில் பெருக்கி மூன்றில் வகுத்த ஈவும் கோல கனக் குழியாக வரும்.

ஸமீகரணங்கள்:—அறைவிட்டம் = (அ.வி);

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(கோலமேற்} \\ \text{பரப்புக்குழி)} \\ \text{= (கோ.மே.ப.கு)} \end{array} \right\} = \left\{ (4 \times \text{வட்டக்குழி}) \right\}$$

$$= \left\{ (4\pi)(\text{அறைவிட்டம்})^2 \right\};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(கோலகன)} \\ \text{க்குழிக்கு} \end{array} \right\} = \left\{ \text{(கோ.மே.ப.கு)} \left(\frac{\text{விட்டம்}}{6} \right) \right\},$$

$$= \left\{ \frac{4}{3} \pi (\text{அ.வி})^3 \right\};$$

உதாரணம்:—

கஜம் = 6 அறை விட்டமுள்ள கோலத்தின் மேற்பரப்புக்குழியென்ன. கோல கனக்குழியென்ன வென்றால்:—

வட்டக்குழி (6 கஜ அறைவிட்ட வட்டத்துக்கு) = 113.0976 இதை நாலில் (4ல்) பெருக்கியது = 452.3904 மேற்பரப்புக்குழி, அல்லது ஷெ 6ன் வர்க்க = $6 \times 6 = 36$. இதை 4ல் பெருக்க = 144 , இதை ($\pi = 3.1416$) ஆல் பெருக்க = 452.3904 = கோல மேற்பரப்புக்குழி இவ்வழியிலும் வந்து விட்டது.

கோலகனங்கனிக்க:—

முன்வந்த கோல பெற்றபற்றித்தழி:— 452'3904. இதை இவ்வுட வட்டம் 12ல் பெருக்க=5428'6848. இதை 6ல் வகுத்த: வந்த ஈவு 904'7818. இல்லையேல் ஷெக்கு இவ்வுட அறை விட்டம் 6 இன் ஈன் = $6 \times 6 \times 6 = 216$. இதை 4ல் பெருக்க 864 = (216×4) . இதை $\pi = 3.1416$ ல் பெருக்கியது = 2714'3424. இதை 2ல் வகுத்த ஈவு = 1357'1712. முன்போலியும் கோல கர்ப்பக்குழியாக, கோல கர்ப்பகனாவும் வந்து விட்டது.

(2) சுத்தளவு ஆகிற வட்டம் தெரிந்த விடத்தில் குறுக்காகிய விட்டம் கணிக்க:—

கணித சுலபத்தக்காகப் பெரியோர்களால் நஷத்த மண்டலத்தை (பகோலத்தை)-21600'-கலைகளாகப் பிழிக்கப்பட்டிருக்கிறது. (என்பது கற்பனை யாலேயே) ஆகையால் இதன் குறுக்க(ளவுக்க)ான விட்டம் அல்லது அறை விட்டம் (என்கிறதிரியா) என்ன அளவு என்றால்:—

தெரிந்த வட்டத்தை ஒன்றால் பெருக்கியதை $(3.1416 = \pi)$ ஆல் வகுத்த ஈவே அவ்வட்டத்தின் விட்டமாகும்.

இதைப் பாதிசெய்ய அறைவிட்டமாகும்.

இல்லையேல் வட்டத்தைப் பதினாறுத்தால் பெருக்கி 3.1416ல் வகுத்த ஈவும் முன்போல் விட்டம் வரும்.

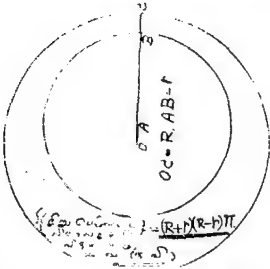
இதை 2ல் வகுக்க ஷெக்கு அறை விட்டமாகிய திரியாவந்து விடும்.

இதற்கு சமீகரணமிக்கே:—

$$\text{விட்டம்} = \left\{ \frac{\text{வட்டம்} \times 1}{(\pi = 3.1416)} \right\} = \left\{ \frac{\text{வட்டம்} \times 10000}{31416} \right\}.$$

தெரிந்தவட்டம் = 21600 இதை 1ல் பெருக்க 21600 இதை $(3.1416 = \pi)$ ல் வகுத்த ஈவு $\left(\frac{31000}{3.1416} \right) = 6875.15$; அல்லது 21600ஐ (10000)ல் பெருக்க 216000000. இதை 31416-ல் வகுத்த ஈவு $6875 \frac{5000}{1118}$ என்றாகும்.

மத்தும் வந்தன வெல்லாமிட்டிக் கணித்துக்கொள்ள வேண்டியது.



படம் (4 A)க்கு விவரணம்:—

படம் (4 A)ஐக் கவனி:—

OC = பெரிய வட்டத்தின் அரைவிட்டம்,

AB = சிறிய வட்டத்தின் அரை விட்டம் ஆகும்.

குறிப்பு:—

இவ்விருவீத வட்ட (ஸென்ட்ரல்களும்) மத்தி பங்களும் ஒன்றாக இருக்கவேண்டும் என்கிற அவசியம் இதைப் போன்ற கேஷ்டாங்களுக்குவசியமே கிடையாது. ஆனால் வட்டத்துள்ளே சிறுவட்டம் எப்படியாவது இருக்கவேண்டியது தான் ஒன்று.

[இங்கே சொன்ன விதியை படம் (4B)க்கு (4C)க்கும் கொள்ள வேண்டியது அவசியம்]

என்பதை உணர்க:—

(AB) அறைவிட்ட வட்டக்குழி கழிந்த, (OC) அறைவிட்ட வட்டக்குழி (விசாலம்) எவ்வளவு என்றால் இதைக் கணிக்க:—

∴ OC = R; AB = r இங்கிப்படியானால்:—

[(பெருவட்டக்குழி) — (சிறுவட்டக்குழி)]

$$= [\pi R^2 - \pi r^2]$$

$$= (\pi \times R^2 - \pi r^2)$$

$$= \pi (R^2 - r^2)$$

$$= \pi (R + r) (R - r)$$

என்பதாயுணர்க.

படம் (4B) க்கு விவரணம்:—

படம் (4B) ஐக் கவனி:—

இதிலும்:—

OB = பெருவட்டத் துரிய அறை விட்டம் = R.

AB = சிறுவட்டத் துரிய அறை விட்டம் = P;

இங்கே பெரு சிறு வட்ட ஓரங்கள் (B) என்றந்தானத்திலே சேருகின்றன. இன்னும் இது போல் பல விதங்களாக அபாயத்தகும்.

ஆகையால்:—

(இங்கும் பெருவட்டச் சிறு வட்டக் குழி களின் வித்தியாசத்துக்குச்)

$$= \pi [(OB)^2 - (BA)^2]$$

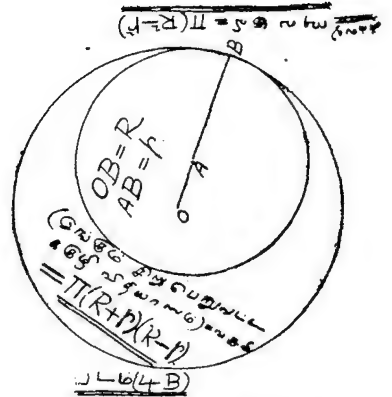
$$= \pi [(OB + BA) (OB - BA)]$$

$$= \pi (R + P) (R - P)$$

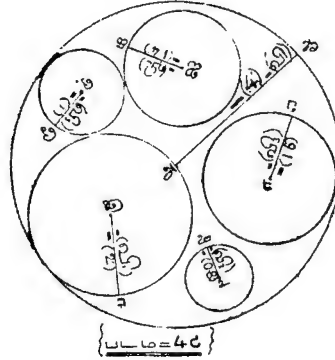
மற்றவை படம் 4A றுச் சொன்னபடிக்காகும்:

படம் (4C) ஐக்கவனிக்கத்தம் இஷ்டம் போல்சந்தேகங்கள் யாவும் அற கேட்குநர்களைச்சாதனம் நன்கு செய்யலாம்:—

மற்றும் வருவன வெல்லாம் இவைகள் போலக் கொள்ளலாம்.



பட்டம் (4C)க்கு விவரணமிங்கு காண்க:—



பட்டம் (4 C)ஐக் கவன:—

பெரியதாகிய (வி) அறை விட்ட வட்டவிசாலத்தில், மற்றய சிறியவைகளாகிய (வி₁, வி₂, வி₃, வி₄, வி₅) அறை விட்ட வட்டங்களின் விசாலங்கள் கழிந்த மிச்சப் பெருவட்டக் குழி என்ன வென்றால்:—

இதற்குச் சில விவரணமிங்கு;

அரைவிட்ட = (வி):—

∴ விட்ட = 2 வி என்றாகும்.

பெருவட்ட அறைவிட்ட = வி = 4' = (அ ஆ).

மற்றய சிறுவட்ட அறைவிட்டங்களினுடைய.

$$\left. \begin{aligned} (இ ந) &= (வி_1) = (2') \\ (உ ஊ) &= (வி_2) = (0.8') \\ (எ ஏ) &= (வி_3) = (1.6') \\ (ஐ க) &= (வி_4) = (1.4') \\ (ஒ ஓ) &= (வி_5) = (1') \end{aligned} \right\}$$

என்பவைகளாகும்:—

இவ்வித கோள்தரங்கடக்கு மிச்ச வட்டக்குழிகணிக்கப் பொது விதி:—

சிறு அறைவிட்டங்களின் வர்க்கக் கூட்டலை பெறு அறைவிட்ட வர்க்கத்தில் கழித்த மிச்சத்தால் (π = 3.1416)ஐப் பெருக்கியதே சிறுவட்டக் குழிகள் கழிந்த மிச்சமாகிய பெருவட்டக் குழியாகும்.—

இதற்கு விளக்கம்:—

இங்கு அறைவிட்ட = (R = r = வி) ஆகையால். பொதுவாய் வட்ட விசாலக்குழி = π (R = r)² = π வி² ∴

$$\begin{aligned} \therefore & \text{(இங்கு சிறுவட்டக் குழிகள் கழிந்த மிச்சமாகிய பெருவட்டக்குழி)} \\ &= \{ (\pi வி^2) - (\pi வி_1^2) - (\pi வி_2^2) - (\pi வி_3^2) - (\pi வி_4^2) - (\pi வி_5^2) \} \\ &= (\pi வி^2) - \pi (வி_1^2 + வி_2^2 + வி_3^2 + வி_4^2 + வி_5^2) \end{aligned}$$

∴ சை ரு = (π) (வி² - வி₁² - வி₂² - வி₃² - வி₄² - வி₅²)
என்பதால் (மேற் கூறிய பொது விதிப் பிறப்பாம்.)

(இதற்குச் சமம்) = π { (வி²) - (வி₁² + வி₂² + வி₃² + வி₄² + வி₅²) } .)
என்றாயிற்று.

செங்கு உதாரணமிங்கு காண்க—

$$வி^2 = 4^2 ரு = 16 \text{ இதில்}$$

$$\begin{cases} வி_1^2 = (2)^2 = 4 \\ வி_2^2 = (0.8)^2 = 0.64 \\ வி_3^2 = (1.6)^2 = 2.56 \\ வி_4^2 = (1.4)^2 = 1.96 \\ வி_5^2 = (1)^2 = 1.00 \end{cases}$$

(சை மொத்த வர்க்கக் கூடலின்) = 10.16 இதை

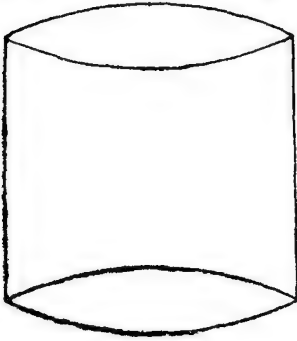
$$கழித்தசேஷம் (16 - 10.16) = 5.84.$$

இந்த 5.84 ஆல் (π = 3.1416)ஐப் பெருக்கியதற்கு (ச் சமம்)
= (3.1416 × 5.84) = 18.346944. என்றாம்.

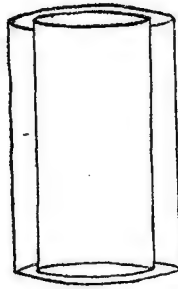
ஆதலால் சை 4 அறைவிட்ட முள்ள பெருவட்டக் குழியில், முறையே
அறை விட்டங்கள் (2, 0.8, 1.6, 1.4, 1) உள்ள சிறுவட்டக் குழிகள் கழிந்த
மிச்சக் குழிக்குச் சரி = சை 18.346944 என்று சொல்வது.

மற்றும் இதற்கு மேலும் வருவன வெல்லாமிப்படியே பார்த்துக் கொள்க.

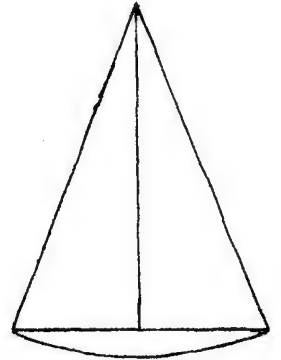
(π = பை)யைச் சம்பந்தித்ததால் பார்ப்பக் கூடியவைகளு மாகிய சில
விசேஷ சிஷ்டாங்கம் இங்கே காண வைண்டியது—



(படம் = 5)



(படம் = 6)



(படம் = 7)

மரக்கால், படி, நாழி, முதலிய முகத்தனைவைக் கருவிகளும்; ஒழுங்குபெற்ற
ரூபாய், அறை ரூபாய், கால் ரூபாய், காலா, தம்பிடி முதலிய நாணயங்களை
ஒன்றன்மேல் ஒன்றாயடுக்கிக் காணப்படும் உருவும் படம் (ஐந்தை) (5ஐ)
அனுசரித்திருக்கும்.

குழாய் முதலியன படம் (6)ன் உருவவனுசரித்திருக்கும்:—

கிரீடம்; கூறாய் (கூருளையாய்) வரும்படி பருப்பு சர்க்கரை முதலியவைகளை கடிதாசியில் கட்டிய உருவம் முதலிய (படம் 7)ஐ அனுசரித்திருக்கும்.

இவ்வித உருவங்களைப்பற்றிய கணிதவிதம்.

ஒழுங்கான உருளையின் கனபரி மாணங் கணிக்க:—

உருளை, வட்ட ஓரங்களுள்ள பட்டையான வடிவமென்று நமக்குத் தெரியும். ஆகையால் இதன் கனபரிமாணத்தை (கனக்குழியை)க் கணக்கிட நாம் அடிப்பாகத்தின் பற்ப்பை (அடிபாகக் குழியை) உயரத்தால் பெருக்கவேண்டும். ஆகையால்

வட்டபாகத்தின் அறைவிட்டம் = (R) என்றும்.—

உருளையினுயரம் = (H) என்றும் ஏற்படுத்திக் கொண்டால்:—

இதன் கனபரிமாணத்தை நாம்:—

(V) = $\pi R^2 H$. என்கிற சூத்தர்தால் கணிக்கலாகும்.

ஆகையால்:—

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ஒழுங்கான உருளை} \\ \text{யின் கனக்குழி} \\ \text{= (கனபரிமாண).} \end{array} \right\} = (\text{ஒ. உ. க. கு}) = V = (\pi R^2 H); \dots (1)$$

ஒழுங்கான உருளையின் தலப்பரப்பு என்கிற மேற்பரப்புக்குழி (உருளை தலக்குழி) கணிக்க:—

ஒழுங்கான - உருளைத் - தலக் - குழி = ஒ. உ. த. கு

∴ (ஒ. உ. த. கு) = $(2 \pi RH)$. என்றாகும் —

கனவடிவ உருளை ஒன்றுக்கு இதனுடன் கூட மேல்பக்கமும் அடிபக்கமும் உண்டு. இரண்டு ஓரத்தவங்களும் சமம்.

இவைகளின் மொத்தப்பரப்பு = $(2 \pi R^2)$ ஆகையால்.

(ஒரு உருளையின் மொத்தத் தலப்பரப்பு)

= $(2 \pi RH + 2 \pi R^2)$ அல்லது இதன்

= $2 \pi R (H + R)$. என்றுமாகும்:—

உருளை போன்ற குழாய் உருக்கள் கணிக்க:—

(படம் 6ல்) காட்டியவாரு கனஉருளைவடிவ மொன்றை யெண்ணிப்பார். இதிலிருந்து அதே உயரமும், ஆனால் அதைவிடக் குறைவான அறை விட்டமுள்ள வேறோர் உருளையை, வெட்டியெடுக்கப்பட்டதாகக் கருதுவோம். இப்படி வெட்டியெடுத்ததிறகு குழாய் ஒன்று ஏற்படுகிறது (காணப்படுகின்றது).

இவ் வடிவத்துக்கே குழாயுருளை என்ற பெயர்.

இதனால் தெரிவது யாதெனில்:—

- ஒரு குழாயுருளையின் கனபரிமாணம் வெவ்வேறு அறை விட்டங்களுள்ள இரண்டு கன உருளைகளின் கனபரிமாணங்களின் வித்தாய்சேர.

இரண்டு உருளைகளின் அறை விட்டங்கள் R; r என்றும், உயரம் H என்றும், $R > r$ என்றும் கொண்டால்:—

(குழாயுருளையின் கனபரிமாணம்)

= (குழாயுருளை கனக்குழி)

= $(\pi R^2 H - \pi r^2 H)$

= $\pi H (R^2 - r^2)$

= $\pi H (R + r) (R - r)$.

என்றாகும்.

இதனுடைய மொத்தத்தலப்பரப்பு, ஒன்று. வெளிப்பரப்பினாலும்; மற்றொன்று உருளையின் உட்பரப்பினாலும் ஆகியது ஆகையால்.

இதன் தலப்பரப்பு = (குழாயுருளை தலப்பரப்பு) என்று கொண்டால்.

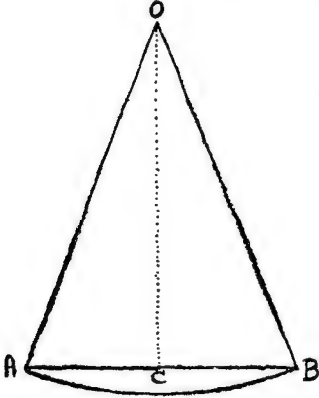
(குழாயுருளை தலப்பரப்பின்) = $(2 \pi R H + 2 \pi r H)$

= $H 2 \pi (R + r)$.

இப்பரப்பில் நாம் மேல்பாகம் அடிபாகம் இவைகளின் பறப்பை கணக்கிடுவதெதுக்கொள்ளவில்லை. பென்பது கவனிக்குக:—

படம் 8ஐக் கவனி. இது ஒழுங்கான வட்டக் கூருருளைக் கோத்தாமாகும்,—

இப்பக்கத்தில் காட்டிய படத்துக்குரிய விவரணம்:—



(படம் = 8)

மணற்குயியலின் ஒழுங்கு, தானியக்கும்பல், இதற்கென்றே செய்யப்பட்ட ஒழுங்கானபுனல் இவைகளெல்லாம் இந்த $(\triangle AOB)$ கோத்தாம்போன்றவைகளே: இந்தவித உருவைத்தான் கூருருளை $(கூர் + உருளை)$ வடிவமென்றழைக்கப்படுகிறது.

(OC) என்ற அச்சின்மூலமாக வெட்டப்பட்ட கூருருளையின் ஒரு பகுதியை பக்கத்தில் காட்டிய (8ம்) படம் தெரிவிக்கின்றது. OA; OB;- இவைகளை நாம் கூருருளையின் சாயந்த பக்கங்கள் என்று

கூறுகிறோம். $(\angle AOB)$ என்பது கூருருளையின் உச்சிக் கோணமாம்.

கனவடிவக் கூருருளைக்குத் தலங்கள் இரண்டுண்டு:—

(a) வட்டவடிவான அடிபாகம்.

(b) சாய்வு தலம்.

CO = செங்குத்து உயறம். AO = BO = சாய்வு உயரங்கள்.

செங்குத்து உயறத்தை h ஆலும், சாய்வு உயறத்தை L ஆலும் குறிப்பது வழக்கம்.

*கூருருளையின் கனபரிமாணம்: = (கூருருளைக்கனக்குழி)

(i) குழிவான உருளையொன்றையும், குழிவான கூருருளையொன்றையும்; எடுத்துக்கொள். இவைகளின் அடிப்பக்கங்களும், உயரங்களும் ஒன்றுக் கொன்று சமமாயிருத்தலவசியம். கூருருளையை பணலாலாவது, நீராலாவது கிரப்பி; உருளை வடிவத்திற்குள் ஊற்று, இவ்விதம் மூன்று முறை செய்தால் உருளை முழுவதும் கிரம்புவதை நாம் காணலாம்.

(ii) கனவடிவமுள்ள உருளையொன்றையும், கூருருளையொன்றையும், எடுத்துக்கொள். இவைகளின் அடிப்பக்கங்களும், உயரங்களும் ஸ்வஸமமாயிருத்தலவசியம். இவைகள் ஒரே பொருளாலும் செய்யப்பட்டிருக்கவேண்டும். இரண்டையுள் நிறுத்துப்பார். இவற்றிலிருந்து கூருருளையின்னிற உருளையின் நிறையில் $\frac{1}{3}$ (மூன்றிலொன்று) என்று நமக்குத் தெரியவரும்.

(iii) தண்ணீர் கொஞ்சமுள்ள இரண்டு அளவு பாத்திரங்களை எடுத்துக் கொள். இவைகளுக்குள் முழுகக் கூடிய ஒரே அடிப்பக்கமும், உயரமுமுள்ள உருளை யொன்றையும்; கூருருளை யொன்றையும், இவ்விரண்டையும் பாத்திரங்களில் போடு. தண்ணீர் மட்டங்களின் அதிகத்தைக் கவனி.

இச்சேரதனை களிலிருந்து நமக்குத் தெரியவது யாதெனிக்:—

கூருருளையின் கனபரிமாணம், ஸம அடித்தலமும்-சம உயரமும்-கொண்ட உருளை யொன்றின் கனபரி மாணத்தின் மூன்று லொரு ($\frac{1}{3}$). பாகம்

$$\text{உருளையின் கனபரிமாணம்} = (\pi r^2 H) = \pi r^2 h.$$

ஆகையால்

$$\text{கூருருளையின் கனபரிமாணம்} = \frac{1}{3} \pi r^2 h. \text{ என்றும்.}$$

கூருருளையின் தலம்:— என்றால்: கூருருளை மேற்பறப்பு:—

(i) கூருருளையின் தலம் ஒரு வட்டத்தின் விருத்த கோணம் சமாகும். சாய்வு உயரம் L என்றும், அடிப்பாகத்தின் அறை விட்டம் r என்று மெடுத்துக்கொள்.

(சாய்வுத் தலத்தின் பரப்பு = விருத்த கோணம்சத்தின் பரப்பு) அதாவது.

$$(\text{வில்லீன்னீளத்திலறைபாகம்} \times \text{விருத்தி கோணம்ச அறைவிட்டம்}) \\ \therefore \text{தலம்} = \frac{1}{2} \times 2 \pi r \times L = \pi r L.$$

கூருருளைப் படம். (AOBC)ஐக் கவனி:

இதில் $\angle(OCB) = \angle(OCA)$ ஒரு நேர்க்கோண முக்கோணமாகையால்

$$(OB)^2 = (OC)^2 + (CB)^2$$

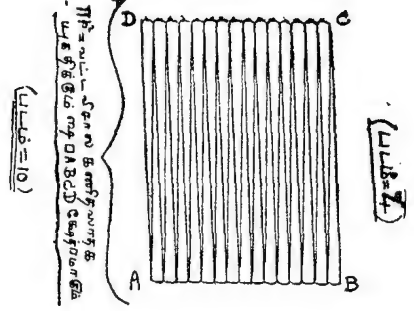
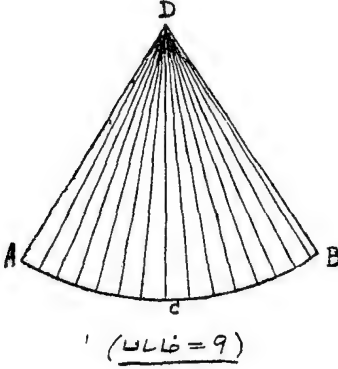
$$\text{அதாவது } L^2 = h^2 + r^2. \text{ ஆகையால்.}$$

வளைவுத்தலத்தின் பரப்பு

$$= \left\{ \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = \pi r (h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

(அடிப்பாகத்தின் பரப்பையும் இத்துடன் கூட்டினால் கூருருளையின் மொத்தப் பரப்பு) $= \pi r L + \pi r^2 = \pi r (L + r)$ அல்லது இதனின் $= \pi r (r + \sqrt{h^2 + r^2})$.

குறிப்பு:— உயாமென்பது எப்பொழுதும் செங்குத்துப் பறத் தையேதான் குறிக்கும்:—



(ii) மேலே காட்டிய (i) - 10 ஆகிய இருபடத்தையும் கவனி:—

கூருருளையின் வளைவு பக்கம் அநேக சிறிய முக்கோணங்களால் ஆனவை என்று கருதிப்பார். [படம் (அ) வைப்பார்] படம் (ஆ) வாக அமைக்கப் பட்டாற்போல் இம்முகக் கோணங்களை அமைத்ததாகக் கருதுவோம் முக். கோணங்கள் சிறியதாகச், சிறியதாக இவைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகும். முக்கோணங்களின் பரப்புகளின் மொத்தம் = (ABCD) என்ற நீண்ட சதுரப் பறப்பினுடைதற்குச் சமம் = (AB × BC.) இங்கே AB = கூருருளையின் அடிப்பாகத்தின் சுற்றளவிற்குப் பாகி. BC = கூருருளையின் சாய்வு (L) உயறம் ஆகையால்:—

(கூருருளையின் வளைவு தலப்பறப்பு) = $[(\pi r L) = (\frac{1}{2} \times 2 \pi r \times L)]$
(மொத்த தலப்பறப்பு) = $(\pi r L + \pi r^2) = [\pi r (L + r)]$ என்பதாம்.

இதுபோல் வந்தக் கூத்தாங்களை மேல் சூத்திர உதவியால் கணித்துக் கொள்ள வேண்டியதாகும்.

இக்கூருருளைச் சம்பந்தமான கணக்குக்கு உதாரணம்:—

ஒர் நெல் (தானியம்) அம்பாரம் ஒழுங்கான கூருருளை வடிவத்தில் குவிந் திருக்கிறது. இதன் துளிக்கும் (உச்சிக்கும்) அடிக்கும் உயி (L) என்கிற சாய்வான உயறம் = 13 அடி. இதன் சுத்தளவோ சுமார் = 31.42; ஆகையால் இவ்வம்பாரத்தின் மொத்தக் கணக்குழியடி என்ன, $1\frac{1}{2}$ அடி உயரம் $1\frac{1}{4}$ அகலம் மாக்காலால் எத்தனை மாக்கால் இருக்கும்: கலம் முதலிய அளவில் இவ்வம்பா அடிக்குறுக்களவும் செங்குத்துயரமும் என்னென்ன இருக்கும்.

என்றால்:—

$$\frac{31.42}{(\pi = 3.1416)} = 10 \text{ அடி குறுக்களவாகும் கீழே அம்பாற அகலம்: } (1).$$

$$\text{சு 10ன் பாதியின் கீழ் அரைவிட்டம்} = 5. \text{ அடியாகும்; } (2).$$

$$\begin{aligned} \text{சு அம்பாரச் செங்குத்துயர அடி} &= (13^2 - 5^2) \\ &= 169 - 25 = 144 = 12^2. \end{aligned}$$

ஆகையால்

அம்பாரச் செங்குத்துயரம் = 12 அடி

...(3)

அம்பாத்தினைக்குழியின் = $(3.1416 \times 5 \times 5) = 78.54$ அடி.

...(4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{வளைவுத் தலமென்னும்} \\ \text{கூருருளையின் மேல் தலம்} \\ \text{பறப்பு (மேற்பரப்புக்குழி)} \\ \text{(இதில் கீழ்தலப்பறப்புச்} \\ \text{சேரவில்லை)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} = (\pi r L) = (5 \times 3.1416 \times 13) \\ = (15.708 \times 13) = (65 \times 3.1416) \\ = (204.204); \text{ அடி} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [(மேல்தலப்பறப்பு + கீழ்தலப்பு) = (\text{ஆகவே} \\ \text{மொத்தத் தலப்பரப்பினுடைய அடி})] \end{array} \right\} = (204.204 + 78.54) \text{ ரு} = (282.744) \quad \therefore (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(கூருருளைக் கனபரிமாண ம'க்ய);} \\ \text{இவ்வம்பாரச் கனக்குழியடிசுருக்} \\ \text{(குச்சமம்)} \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h \right) \therefore \text{இதற்கு} = 26.18 \times 12 = (314.16) \quad \therefore (7)$$

மரக்கால் உயரம் = $1\frac{1}{2}$ அடி. அகலம் $1\frac{1}{4}$ அடி. எப்போதும் மரக்கால் வட்டரூபமாகவே யிருப்பதால்:- இதன் விட்டம் = $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \therefore \frac{1}{2}$ விட்டம் = $\frac{5}{8} = (\frac{5}{4} \times \frac{1}{2}) \therefore$ இதன்குழி = $3.1416 \times \frac{25}{64} = .0490875 \times 25 = 1.2271875 = (\text{இதே ஷெ மரக்காலின் குழி})$

\therefore ஷெ மரக்கால் கனக்குழியின் = $1.2271875 \times (1\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} = 1.84078125$

$$\therefore \left(\frac{\text{அம்பாரச் கனக்குழியடி} = 314.1600000}{\text{மரக்கால் கனக்குழி அடி} = 1.84078125} \right) = \left(\frac{314.160}{1.841} \right) = (170.646) \text{ மரக்கால்.}$$

ஷெ (1.841) கன அடி. மரக்காலால் (314.160) கன அடியம்பாரம்; ஆகும் நெல் மரக்காலின் = (170.646) என்றும்பின் = 171.

இம்மரக்கால்களின் எலம் = $[1\frac{7}{8}] = 14$ எ. 3ங. (அதாவது பதினான்கு கலனை முக்குறுணி) = $14\frac{1}{4}$ எ என்பது.

மற்றும் வந்தனவெல்லாம் பம்படிப் பார்த்துக்கொள்ளவும்.

ஒழுங்கான வட்ட உருளை என்பது கீழே சொன்ன மரக்கால் உயரம் ($1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$) அடி இதன் குறுக்கு விட்ட மென்கிற கல அடி ($1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$) இதற்கு மேலே மரக்காலுக்குக் காட்டிய மொத்த கன அடி கணித உதாரணமே தான் ஒழுங்கான வட்ட உருளைக்காகும்.

மற்ற இதன் விசாலம் முதலிய கணிப்பவை சுலபமே யாகையால் உதகரிக் காமல் விடப்பட்டதார் என்பது.—

(படம் 11) இதற்குரிய சில விவரத்துக்குறிய குறிப்புகள்:—

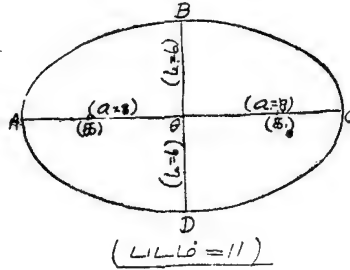
இந்நீன் வட்டச் சம்பந்த மான (θ = கர்ப்ப கோந்திரம்) அல்லது மத்ய கோந்திரம், இக்கோந்திர பிந்ததைவ முக்யஸ்தான மாங்க் கொண்டு இந் நீண்ட வட்ட மேற்படுகதில்லை. ஆகையால் (க); (க₁) என்கிற ஸ்தானங்களில் உள்ள

மண்டல (நீள் வட்ட ஸாதகபிந்துக்கள் [அதாவது இரு கேந்திரங் (நாபி)கள்] ஏற்படு மென்பதாம். இவ்விரு நீள் வட்ட நாபி (க க₁)களும் எப்போதும் இவ்வட்டத்துள்ளடங்கிய நீண்ட விட்டத்தில் (வியாஸத்தில்) தான் நிற்கும். (1).

வாஸ்தவத்தில் வான வெளியில் சலித்துச் சுற்றும் கிரக வட்ட (வக்ர)ரேனக [(a, b)க் களின் வித்யாஸ அறை விட்டத்தையுடைய) (o ABCD)] யையே அனுசரித்திருக் கின்றது—சுமாராகப்பார்க்க அந்தக் கிரகங்களின் போக்குக் குறிய நீள்வட்டரேனக போலத் தோன்றலாகும் a, b ($\frac{1}{2}$ வியாசங்களும்) அரை விட்டங்களும் சற்றேயக் குறைய (சுமாராக) ஒன்றாகவே இருக்கும். ஆகையால் பூர்வீக வானசாஸ்திரிகளால் நீள்வட்டச் சம்பந்தமான கிரக(மந்த) பலஸாதனமும் ஸவட்டத்தை யனுஸரித்தேயுள்ளது.

மற்ற விவரம் பொது விதியில் பார்—(AC = 2a, BD = 2b) இவை பற்பல வித்யாஸமாகலம்.

மேலும் நீண்ட வட்டத்தைப் பற்றிய விஷயம்:—



மேலே (பட்டம் 11-ல்)காட்டிய கேந்திரம் போல் உள்ளவைகட்டு வட்ட மத்திய கேந்திரம் (ஸன்ட்ரல்)கள் இரண்டுண்டு. ஆகையால் இதற்குரிய அரை விட்டம் (OB = OD = b, AO = OC = a) அறை விட்டம் மத்திய கேந்திர கோணங்கள் தோறும் வேறுபட்டுக் கொள்ளே b யிலிருந்து a வறையில் கிருத்தியையும் இம்முறையிலேயே குறைவுமடையும். என்பதை முதலில் இவ்வித நிலங்கட்குக் கவனிக்க வேண்டியுடவசியம்.

இங்குதெரிந்த அரைவிட்ட வித்யாஸமான a, bக் களைக் கொண்டு நீண்ட வட்டமாகிய (o ABCD)யின் நீண்ட வட்டக் கோடு கணிக்க:—

விபரம்:—

இருவித விட்டங்களின் வர்க்கங்களைக் கூட்டிப் பாதி செய்ததை மூலம் செய்தால் (மூலீததல்) ($2\pi = 2\pi$)யைப் பெருக்கியதே நீண்ட வட்டரேனக.

பெரு அரை விட்டம் சிறு அறை விட்டம் π . இம் மூன்று துகைகளை ஒன்றுக் கொண்டு பெருக்கியதே நீண்ட வட்டக்குழி என்கிற நீண்ட வட்டத் திணுடைய விசாலமாம்.

இதன் சமீகரணம்:—

$$\therefore (\text{நீண்ட வட்டரேனக}) = 2\pi \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)} \quad \dots (1).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{நீண்ட வட்டக்குழியல்லது} \\ \text{நீண்ட வட்ட விசால விஸ்தீர்ணம்} \end{array} \right\} = (\pi \cdot a \cdot b) \quad \dots (2).$$

செக்கு உதாஹரணம் கீழ் காண்க:—

செ. கண்ட நீட்ட வட்ட அறை விட்டங்களாகிய $a = 8$, $b = 6$ ஆனால்
(\odot ABCD) என்கிற நீண்ட வட்டரேகை என்ன; செ நீண்ட விட்டக்குழியளவு
மென்ன வென்றால்:—

$$\odot A B C D = 44.42851 = \left\{ \begin{array}{l} (2 \times 3.1416) \sqrt{\left(\frac{8^2 + 6^2}{2}\right)} \\ = \sqrt{6 \cdot 2832(32 + 18)} \\ = (6 \cdot 2832) \times \left\{ \sqrt{50} = (7.071) \right\} \end{array} \right.$$

இதற்கு மற்றோர் வழி சுலபத்தில்

செ \odot ABCD = 43.9824 = $\pi (a + b) = 3.1416 \times (8 + 6)$ இது
அதை விட ஸ்தூல அளவைத்தான் காட்டும்: அதேவெகு துட்பவிடை.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{நீண்ட வட்ட } (\odot \text{ ABCDயின்} \\ \text{குழி) (ப்பாப்பு) விசாலம்} \end{array} \right\} = 150.7968 = (\pi a b) (31416 \times 8 \times 6).$$

என்பதாம்.

மற்றும் வந்தன வெல்லாபிப்படி பார்த்துக் கொள்ளவும். (புத்தக
விஸ்தாபயத்தால் இதோடு இவ்விஷயங்கள் நிறுத்தப்பட்டன).

விருத்தம்:—

ஒருபதினாவினாடே

உத்திடுமிருபதுக்கே—

வரு நிலமென்ன வென்னில்:—

மருவிய ஒன்றுக்கோரா கவும் வருத்து வீரே—(46)—

என்பது:—

கீள் றோல்-யசு (16)க்கு தென் மடல் (உயி = 20)று (ஒன்றுக் கொன்று
நீழ்ச்சியில் விசுதி விசாலப் பரிபாணம்) யெத்தனை யென்னில்:—

யசு (16)யும் (ய = $\frac{1}{16}$)ல் கழிக்க-க (1), உயி (20)யும் — ய ($\frac{1}{16}$)ல் கணிக்க-
கவ (1 $\frac{1}{4}$) ஆதலால்:— கவ (1 $\frac{1}{4}$)று-ப-று-(மா-காணி) என்பது.

யெதுவுமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.—

வெண்பா:—

பாராய்கிளமேல் பனிரண்டே. தென்மடலே

ஓராமல் நிலமுகாணியாம் நேராக—

வந்தநில முந்திரியாய் மாருபதினாரினிலே

தொந்தமுரு கைக்கீயந்து சரிசொல் = (47)

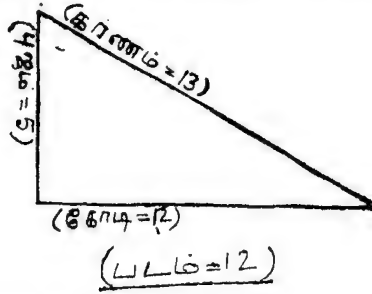
என்பது:—

கீழ்மேல் - உயி (12) று தென் மீ அரியாமல் நிலம் சுறு (3/80 = முக்தாணி
யானான் தென் மீ சொல்லறியும்) வகை—

• சூ (முக்கோணி) நிலத்தையும் முந்திரிப்படுத்த - உஉ (12). இதை முந்திரிக் குளி - யசு (16). பென்பது - யசு (16)ல் மாற - ஈசுஉ (192 = 12 × 16). இதை (தெரிந்த) ஒரு கைக்கோல் - உஉ (12) ருக்குக்க நயவு யசு (16) ஆதலால் தென் னீ (நீளக்கோல்) யசு (16) என்பது:...

இவ்விதங் கணிதகார்த்தா- நிலப்பறப்பும் ஓர் பக்க நீளமும் தெரிந்தால் மற்றோர் பக்கங்கணிக்க வழி கூறுகிறார். கீழ்மேல் தென்வடல் இருநீளமுந் தெரிந்தபோது அந்நிலம் மனை (விசாலங்கணிக்க) பறப்புக்கணிக்க முன்னே கூறி இருக்கிறார். இவைகள் மூன்றவயவங்கையுங்கணிக்க; வேறு சில வழிகளும் இருக்கின்றது கூடியவறையில் வெகு சுருக்கமாக அவ்வழிகளை இனி விவரிக்கப் படுகின்றன:—

இவைகள் (கேத்ரமிதி) ஜ்யாமிதி விகிதங்கள் என்று சொல்லப்படும்:—



(படம் 12) ஐக்கவனி:—

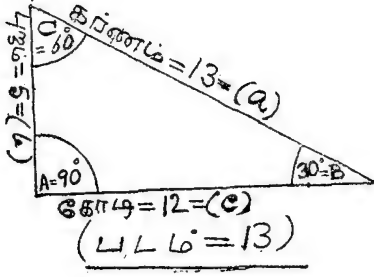
இந்த கேத்ரத்தில் கர்ணம் = 13, கோடி = 12, புஜம் = 5. ஆக அமைந்திருக்கிறது.

இந்த கேத்ரஸம்பந்தமாக முதலில் கவனிக்க வேண்டியவைகள் சில வருமாறு:—

இவ்வித முக்கோண கேத்ரத்தில் ஜாத்ய (சேர்க்கோண முக்கோண) த்ரி கோணகேத்ரமென்றும், அஜாத்ய த்ரிகோண (விஷமத்ரிகோண) விஷம முக் கோண கேத்ரமென்றும் இருவகை:—

ஸமத்ரிகோணத்தில் ஏதாவது இருபுஜங்களின் சேர்க்கை ஸ்தானத்தில் கோணம் (90°) பாகையாக இருக்கும். இதற்கெதிர்புஜமே கர்ணக்கோடாகும், இதைவிட மற்ற இருபுஜங்களும் சிறிதாகவே குறைந்திருக்கும். கோணங்களும் அந்தந்த புஜத்துக்கெதிரானவைகள் (90°) பாகைக்குக் குறைந்தே இருக்கும்: ஆகவே கோணங்களின் பாகையாதிகள் மூன்றும் ஒன்று சேர்க்க மொத்தம் = (180°) வந்துவிடும்:—

விஷமத்ரிகோணத்தில் எந்த புஜங்களின் சம்பந்தக் கோணங்களும் (90°) . ஆக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. ஆகையாலதற்கு விஷம (த்ரி)புஜ முக் கோணமென்று பெயர் வந்தது. மற்றவையாவும் ஸமகோண முக்கோணத் துக்குச்சொன்னது போலவேயாகும்:—



இங்கு (180°) க்கு $= (90^\circ + 60^\circ + 30^\circ)$.

$$\therefore C = 60^\circ = (180^\circ - 90^\circ - 30^\circ);$$

$$B = 30^\circ = (180^\circ - 60^\circ - 90^\circ)$$

$$A = (180^\circ - 60^\circ - 30^\circ) = (180^\circ - 90^\circ) = 90^\circ;$$

$$\text{ஆகையால் } (180^\circ) \text{ று } = [(A + B + C) \text{ ள்ளும்}]$$

$$\left. \begin{aligned} \text{இங்கே கோடி} &= c = 12 \\ \text{புஜம்} &= b = 5 \\ \text{கரணம்} &= a = 13 \end{aligned} \right\} \therefore$$

$$a^2 = c^2 + b^2 = (c-b)^2 + 2cb \quad (1)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad (2)$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = (a+c)(a-c) \quad (3)$$

என்று ஸம்த்ரிகோண (ஸாஜாத்யத்ரிகோண) ஸம்பந்தத்தைப்பற்றிய வரையில் சூத்ரங்கள்:—

இதன் விடத்தவிளக்கம்:— ஸாஜாத்யத்ரிகோணத்தில் கர்ணம், புஜம், கோடி என்று மூன்று புஜ (கோட்டு) உருவ (அவயவ)ங்கள், கர்ணஸம்முகமான இரு புஜசந்திப்பு ஸ்தானக்கோணம் ஸதா (90°) பாகமே உள்ளது, மற்ற கோடி ஸம்முககோணம் புஜ கர்ணஸம்பந்த ஸ்தலத்திலும் புஜ ஸம்முககோணம் கோடி கர்ண ஸம்பந்தஸ்தலத்திலும்ருக்கும். இவ்விருண்டுக் கூடல்களும் ஸதா (90°) ஆகவேயுள்ளது. இவ்விதம் கோண உருவ அவயவங்களும் மூன்று:—

கர்ணவர்க்கத்தில் கோடிவர்க்கத்தைக் கழித்தால் புஜவர்க்கமும், கர்ண வர்க்கத்தில் புஜவர்க்கத்தைக் கழித்தால் கோடிவர்க்கமும், கோடிவர்க்கத்தோடு புஜவர்க்கம் கூடினால் கர்ணவர்க்கமும் வருமென்பதாம்:— (1)

அல்லது.

கோடியை புஜத்தால் பெருக்கி ரட்டித்தோடு கோடி புஜாந்தரவர்க்கம் கூடினால் கர்ண வர்க்கம் வரும்.

கர்ணத்தில் கோடியைக் கூட்டியதை, கோடியைக் கர்ணத்தில் கழித்ததால் பெருக்க புஜவர்க்கம் வரும்.

கர்ண புஜக்கூடலை; கர்ணபுஜ வித்யாசத்தால் பெருக்கினு வித்தகையே கோடிவர்க்கமாகும்:— (2)

இதன்ஸமீகரணம்

$$(\text{கர்ண})^2 = (\text{கோடி})^2 + (\text{புஜ})^2$$

$$(\text{கோடி})^2 = (\text{கர்ண})^2 - (\text{புஜ})^2$$

$$(\text{புஜ})^2 = (\text{கர்ண})^2 - (\text{கோடி})^2 \quad (1)$$

$$(\text{கர்ண})^2 = \{ 2 (\text{கோடி} \times \text{புஜம்}) + (\text{கோடி} - \text{புஜம்})^2 \}.$$

$$(\text{கோடி})^2 = \{ (\text{கர்ண} + \text{புஜ}) (\text{கர்ண} - \text{புஜ}) \}.$$

$$(புஜ)^2 = \left\{ (கர்ண + கோடி) (கர்ண - கோடி) \right\}; \quad (2)$$

செ. களுக்கு உதாரணம்:—

பக்கத்தில் காட்டிய படத்தில் கர்ணம் = 13,

கோடி = 12 \therefore புஜமென்னவென்றால்

$$(13^2 - 12^2 = (169 - 144) = (25) = (5)^2$$

ஆகையால் புஜம் = 5 ஆம் (1) —

கர்ண = 13, புஜ = 5, கோடி = ? வென்றால்:

$$(13^2 - 5^2) = (169 - 25) = (144) = (12)^2$$

\therefore கோடி = 12 ஆம்

(2)

புஜ = 5, கோடி = 12; கர்ண = ? எனில்:—

$$5^2 + 12^2 = (25 + 144) = 169 = (13)^2$$

\therefore கர்ண = 13. என்பது

(3) —

மற்றோர்வழிப்படி இம் 3ம் கணிக்க:—

$$(கர்ண)^2 = (13)^2 = 169 = 2 \times 12 \times 5 + (12 - 5)^2 = (120 + 49)$$

\therefore கர்ண = 13.

(1)

$$(கோடி)^2 = (13 + 5) (13 - 5) = (18 \times 8) = 144 = (12)^2$$

\therefore கோடி = 12.

(2)

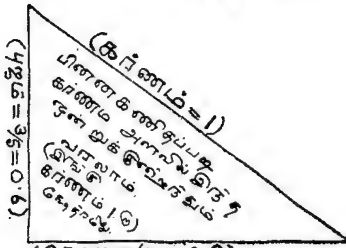
$$(புஜ)^2 = (13 + 12) (13 - 12) (25 \times 1) = (25 = (5)^2$$

\therefore புஜம் = 5 ஆகும்

(3) —

பின்னத்திலும்:—

இங்கேயும்:—



$$(கோடி = \frac{4}{5} = 0.8)$$

$$(புஜம் = \frac{3}{5})$$

$$(கர்ண)^2 = 1 = \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{9}{25} + \frac{16}{25} \right\} = \left(\frac{25}{25}\right) \text{ இதன்மூலம்}$$

$$= \left(\frac{5}{5}\right) = 1. \text{ ஆகும்.}$$

(1) —

$$(கோடி)^2 = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\therefore \text{கோடி} = \frac{4}{5}. \text{ ஆகும்.}$$

(2) —

$$\text{புஜவர்க்க} = (புஜ)^2 = \left(1 - \frac{16}{25}\right) - \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\therefore \text{புஜ} = \left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

(3) —

இவைகளை மற்றோர் விதத்தாலும் கணிக்கலாம்.

$$(கர்ண)^2 = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)^2$$

$$= \frac{4}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \therefore \text{கர்ண} = 1.$$

(1) —

$$(புஜம்)^2 = \left(1 + \frac{4}{5}\right) \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{9}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \therefore \text{புஜத்தின்} = \frac{3}{5};$$

(2) —

$$(கோடி)^2 = \left(1 + \frac{3}{5}\right) \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \therefore \text{கோடிக்கு} = \frac{4}{5} \text{ என்றாகும்}$$

(3) —

மற்றும் ஒருவனவெல்லாமிப்படிக்கொள்க:—

இவ்வித வழிகள் ஸமத்ரி கோண சேஷத்தரத்திலும், ஸமசதுரம், நீண்ட நாற் சதுரமிவைகளிலும் வெகுவிதத்தில் உபயோகமாகின்றன. விவரங்கள் யாவும் மேலே படிக்கத் தெரியும்.—

இங்கே இஷ்டமான கோடி புஜகர்ணங்களில் ஏதாவது ஓர் அவயத்தையும் இஷ்ட லக்கத்தையுங்கொண்டு மற்ற இரு அவயங்களைக் கணக்கும்விவரம்

இவ்விதமேற்படும் சேஷதரங்கள் ஜாத்ய த்ரிகோண (நேர்க்கோண முக் கோண) ங்களுக்கே உரியன.

(1) இஷ்ட புஜத்தை, ரட்டித்த இஷ்டலக்கத்தால் பெருக்கு, இதை இஷ்டலக்க வர்க்கத்தில் ஒன்று குறைத்ததால் வகுத்த ஈவு கோடி. இதை இஷ்டலக்கத்தால் பெருக்கியதில் புஜத்தைக் கழித்ததால் கர்ணமாகும்.

இதற்கு உதாரணம்

(1)—

$$\text{இஷ்டபுஜ} = 12, \text{இஷ்டலக்க} = 2$$

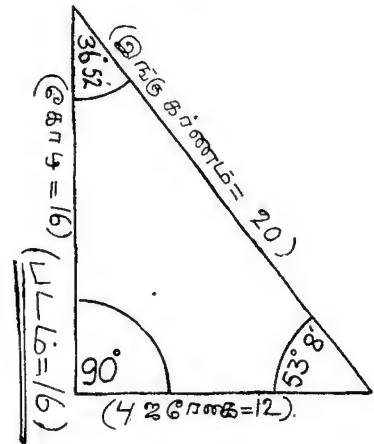
$$\therefore (\text{கோடி}) = (16) \text{ ரு}$$

$$= \frac{2 \times \text{இஷ்டலக்க} \times \text{இஷ்டபுஜ}}{[(\text{இஷ்டலக்க})^2 - 1]}$$

$$\frac{2 \times 2 \times 12}{(2^2 - 1)} = \frac{48}{(4 - 1)} = 3 = 16.$$

$$(\text{கர்ணம்} = 20) \text{ ரு}$$

$$= \{ (\text{கோடி} \times \text{இஷ்டலக்கம்} - \text{புஜம்}) \\ = (16 \times 2 - 12) = (32 - 12) = 20.$$



இவ்வித உதாரணப்படி;—

(2) இஷ்ட லக்கம் 3, புஜம் 12. இவை களால் ஏற்பட்ட கோடி = 9ம், கர்ணம் = 15 ஆகும்.

(3) இஷ்டலக்கம் 5, புஜம் = 12 இவைகளால் ஏற்பட்ட கோடி = 5, கர்ணம் = 13 என்றாகும்.

மற்றும் வரும் புஜ இஷ்ட லக்கங்கட்கு இவ்விதமே கோடி கர்ணங்கள் கணித்துக் கொள்க.

குறிப்பு:— ஆனால் இவ்விதம் இஷ்டபுஜம் = 13, இஷ்டலக்கம் = 9. இவற்றால் சரியானபடி கோடி கர்ணங்கள் ஏற்படவில்லை. மேலே காட்டிய விவரணம் படிக்கு என்பதுங் கவனிக்குக.

இதற்கு வேறுவிதமான வழியுமுண்டு:

விவரணம் (2)

இஷ்ட புஜவர்க்கத்தை இஷ்டலக்கத்தால் வகு ஈவை ரண்டிடத்தில் வை இஷ்ட எண்ணை ஒன்றில் சேர், மற்றொன்றில் கழி வந்த தொகைப்பாதி யே கர்ணமுடி கோடியுமாகும்.

இதற்கு உதாரணம்:—

இங்கும் புஜம் = 12, இஷ்டலக்க = 2.

$$A = \left\{ \frac{(புஜம்)^2}{(இஷ்டலக்கம்)} \right\} = \left\{ \frac{(புஜம் \times புஜம்)}{(இஷ்டலக்கம்)} \right\}$$

கோடி = $\frac{1}{2} (A - இஷ்டலக்கம்)$;

கர்ணம் = $\frac{1}{2} (A + இஷ்டலக்கம்)$

$$கோடி = \frac{1}{2} \left(\frac{12 \times 12}{2} - 2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{144}{2} - 2 \right) = \frac{1}{2} (72 - 2) = \frac{1}{2} (70) = 35.$$

$$கர்ணம் = \frac{1}{2} \left(\frac{12 \times 12}{2} + 2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{144 + 2}{2} \right) = \frac{1}{2} (72 + 2) = (74) = 37.$$

இவ்விதம் இஷ் எண் 4 ஆல் ஏற்பட்ட புஜகோடி கர்ணங்கள் = 12, 16, 20; 6ல் ஏற்பட்டவை முறையே 12, 9, 15 என்றுமாகிறது.

இஷ்ட கர்ணத்தாலும், இஷ்ட வெகுலக்கத்தாலும் இக்கர்ண சம்பந்தியான வெகு கோடிபுஜங்களைக் கணிக்க:—

கர்ணரட்டிப்பை. இஷ்டலக்கத்தால் பெருக்கியதை, இஷ்ட எண் வர்க்கத் தோடு ஒன்று சேர்த்த துகையால் வகு. சுவே கோடி. இக்கோடியை இஷ்ட எண்ணால் பெருக்கியதில் கர்ணங்கழிந்த மிச்சமே புஜமாகும்.

(இதற்குச் சமீகாணம்).—

$$கோடி = \left\{ \frac{(2 \times இஷ்ட எண் \times கர்ணம்)}{\left\{ (இஷ்ட எண்)^2 + (1) \right\}} \right\};$$

புஜம் = (கோடி \times இஷ்ட எண் - கர்ணம்).

இதற்கு உதாஹரணம்:— கர்ண = 85. இஷ்டலக்க = 2

$$\therefore கோடி = 68 = \frac{2 \times 2 \times (கர்ண = 85)}{(2^2 + 1)} = \frac{340}{(4 + 1)} = \frac{340}{5} = 68.$$

$$புஜம் = (51) = (68 \times 2 - 85) = (136 - 85) = 51.$$

இஷ்ட எண் 4 ஆல் ஷே கர்ண = 85க்கு ஏற்பட்ட கோடி = 40, புஜம் = 70. ஆகும்.

(2) இதற்கு மற்றோர்வழி:—

கர்ணரட்டிப்பை, இஷ்ட எண்வர்க்கத்தோடு ஒன்று சேர்த்த துகையால் வகு; சுவைக் கர்ணத்தில் கழித்ததே கோடியும், சுவையே இஷ்ட எண்ணால் பெருக்கியது புஜமாகும்:—

இதற்குச் சமீகரணமிங்கு:—

$$B = (\text{சுய்வு}) \left\{ \frac{\text{கர்ணம்} \times 2}{\{(இஷ்டஎண்)^2 + (1)\}} \right\}$$

கோடி = (கர்ணம் - B); புஜம் = (B × இஷ்ட எண்).

இஷ்ட கர்ண = 85, இஷ்ட எண் = 2 இவற்றால்:—

கோடி புஜங்கணிக்க உதாரணம்:—

$$B = (\text{சுய்வு}) = \frac{85 \times 2}{(2^2 \times 1)} = \frac{170}{5} = 34.$$

$$= (34 \times 2 = 68,) = \text{புஜம்} = 68.$$

$$\text{கோடி} = (85 - 34) = 51.$$

என்பதாகும்:—

இருவித இஷ்டஎண் = 4 ஆலும், 85 கர்ணத்தாலும் ஏற்பட்ட கோடி = 75, புஜம் = 40:—

இங்கு பெயருக்கு புஜ கோடி என்ற ஸம்க்களுயே தவிர கர்ணமென்றும் இரு புஜமென்றும், அல்லது இருகோடிகளென்றும் சொல்லுக உலகவழக்கி உள்ளது கவனிக்குக — இகனால் ஒன்றும் ஸ்வரூப (உருவ) பேதமில்லை:—

இருவிதமாகிய இஷ்ட எண்களாலே (லக்கங்களாலே)யே, கர்ணம், புஜம், கோடி ஆகிய ஜாத்ய த்ரிகோண கெதிர சம்பந்தமான முன்றவயங்களைபுந் கணிக்க:—

இருவித இஷ்ட எண்களை ஒன்றுக் கொன்று பெருக்கியதை ரட்டித்ததே கோடி. இருவித எண்களின் வர்க்க வித்யாசமே புஜம். இருவித எண்களின் வர்க்கக் கூடுதலே) சேர்க்கையே கர்ணமுமாம்.

இதற்குச் சமீகரணம்:—

இங்கு இருவித இஷ்ட எண்களின் ஒன்றை (A) என்றும். மற்றொன்றை (B) என்றுங் கொண்டால் அப்போ:—

ஸாஜாத்யத்ரி புஜாவயவங்களாகிய கோடி, புஜ, கர்ணங்கள் கணிக்க:—

$$\left. \begin{aligned} (\text{கோடி}) &= (2 \times A \times B,) & (1) \\ (\text{புஜம்}) &= (A^2 - B^2) & (2) \\ (\text{கர்ணம்}) &= (A^2 + B^2) & (3) \end{aligned} \right\} \text{என்பதாகும்.}$$

இதற்கு உதாஹரணமிங்கு:—

இரு இஷ்ட எண்களில் $A = 3$, $B = 2$, ஆகக்கொண்டால்:—

கோடி புஜ கர்ணங்களை ஸமீகரணப் படிக்க கணிக்க.—

கோடி $= (2 \times A \times B) \therefore = 2 \times 3 \times 2 = 12$ ஆகும்.—

புஜம் $= (A^2 - B^2) \therefore = (3^2 - 2^2) = (9 - 4) = 5$ ஆகும்.—

கர்ணம் $= (A^2 + B^2) \therefore = (3^2 + 2^2) = (9 + 4) = 13$ ஆகும்.—

இவ்விதமே இஷ்ட எண்களை ($A=5$, $B=4$) ஆகக் கொண்டலப்போ:—

கோடி $= (2AB) \therefore = 2 \times 5 \times 4 = 40$.

புஜம் $= (A^2 - B^2) \therefore = (5^2 - 4^2) = (25 - 16) = 9$.

கர்ணம் $= (A^2 + B^2) \therefore = (5^2 + 4^2) = (25 + 16) = 41$.

$\therefore (\text{கர்ணம்})^2 = (\text{கோடி})^2 + (\text{புஜம்})^2$

$(\text{இக்கர்ணம்})^2 = 1681 = (1600 + 81) = (40^2 + 9^2 = 1681)$

$= (40^2 = 1600) + (9^2 = 81)$ என்றும்.

அல்லது $A = 63$, $B = 60$, எனக் கொண்டால்:—

(கோடி) $= (2 \times A \times B) = 2AB \therefore = 2 \times 63 \times 60 = 2 \times 3780 = 7560$.

(புஜம்) $= (A^2 - B^2) \therefore = (63^2 - 60^2) = (3969 - 3600) = 369$.

(கர்ணம்) $= (A^2 + B^2) \therefore = (63^2 + 60^2) = (3969 + 3600) = 7569$.

இங்கே:— $(\text{கர்ணம்})^2 = \{7569^2 = (57289761)\}$

$= \{(7560^2 = 57153600) + (369^2 = 136161)\}$;

என்று இவ்விதமெல்லாம் இஷ்ட இருஎண்களின் படிக்குக் கோடி புஜ கர்ணங்கள் அமையும்.

முன் சொல்லியவைகளைவிட மேலமைக்கப்பட்ட ஸூத்ர (ஸமீகரண) ஸாதந கோடி புஜகர்ணங்களே எங்கும் எப்போதும் வித்யாஸமடையாது என்பது

இனி ஜாத்யத்ரிகோணரேகா கேஷத்ரத்தை ஸஜாதி (ஏகஜாதி = ஒரேஜாதி) யாகவே சம்பந்தித்த மற்றோர் த்ரிகோண கேஷத்ரத்தை முன் தெரிந்த கேஷத்திர உருப்புகளால் கணிக்க வேண்டிய விதி விவரணம்:—

இந்த கேஷத்ரத்தைப் பற்றி முதலில் தெரிந்து கொள்ள வேண்டிய சில விஷயங்கள் இங்கு

• இங்கே $a = 100$; மற்ற விவரம் மேலே பார்க்க—

$$2a a_1 = c^2 + b^2 - a^2;$$

இந்த ஸமீகரணப் பிறப்பின் ஸாதக புத்தி விவரம் இங்கே நிரூபிக்கப் படுவதை கவனிக்கുക:

$$(a + a_1)^2 = (c^2 + c_1^2); c_1^2 = a_1^2 + b^2;$$

$$\therefore (a + a_1)^2 = (c^2 + b^2 + a_1^2).$$

$$\therefore (a^2 + 2aa_1 + a_1^2) = (c^2 + b^2 + a_1^2) = 2aa_1 = c^2 + b^2 - a^2.$$

\therefore இதை ஆதாரமாகக் கொண்டு பிறகு:—

செ $a = 100$, $b = 240$, $c = 260$, என்று தெரிந்த இதிலிருந்து.

தெரிய வேண்டியதான புஜம் (a_1)ஐக் கணிக்க:— மேற்கூறியபடி ஸூத்ரத்தை உபயோகிக்க:—

$$(100 + a_1)^2 = (260^2 + 240^2 + a_1^2)$$

$$= (100^2 + 200a_1 + a_1^2) = (260^2 + 240^2 + a_1^2)$$

இவ்விரு சமத்துவங்களில் ஒன்றிலொன்றைக் சுழிக்க:—

$$\{ (100^2 + 200a_1 + a_1^2) - (260^2 + 240^2 + a_1^2) \}; \text{ இதில்கவனி.}$$

இரண்டு ஸமஸ்தானத்திலுள்ள இந்த $(+ a_1^2)$ என்பது சனதில்ருணம் போக மிச்சம் = 0 ஆனதால்தன் புரம்பாக நின்றவைகளை விவரணத்தில்பார்.

$$\therefore 200a_1 = (260^2 + 240^2 - 100^2) = 200a_1 = (67600 + 57600 - 10000)$$

$$= 200a_1 = 115200 \therefore a_1 = \left(\frac{115200}{200a_1} \right) = 576. \text{ என்பது.}$$

இதனால் ஏற்பட்ட தென்ன வென்றால்:—

$$a_1 = \frac{(c^2 + b^2 - a^2)}{2a};$$

இவ்விதமே.

$$a = \frac{(c_1^2 + b^2 - a_1^2)}{2a_1} \text{ என்பதாம்:}$$

அதாவது மேலே காட்டிய த்ரிபுஜ உருவம் $\angle DAB$ -யில் $\angle ACD$ தெரிந்து இதனால் (CB)ஐக் கணிக்கவேண்டுமென்றால், (DC = புஜம், CB = இது ஸம்பந்தபுஜம் அல்லது CB புஜமானால் DC ஸம்பந்தபுஜம், DB தெரியக்கூடிய கர்ணம், AB தெரியாத கர்ணம். என்று கொண்டால்)

இதற்குப் பொதுவழி:—

தெரிந்த கர்ணவர்க்கத்துடன் தெரிந்த கோடிவர்க்கத்தையும் சேர்த்து இதில் தெரிந்த புஜவர்க்கத்தைக் சுழித்த மிச்சத்தை; தெரிந்த ரட்டித்த புஜத் தால் வகுத்த ஈவே, இப்புஜத்துடன் ஸம்பந்திந்த தெரியக்கூடிய கர்ணகண்டமாகிய மற்றோர் புஜம் வரும்:—

• அதாவது இரண்டு த்ரிபுஜ கேஷத்ரங்களுக்கு ஒரே கோடியாகிய (படம்-17, 18ல் கண்டபடி) இவ்விருண்டில் ஒர் கோடி, கர்ணபுஜகள் தெரிந்து இவ்வுருப்புகளினால் மற்றய (தெரிய வேண்டிய) புஜத்தையும், இதனால் கர்ணத்தை புங்சுணிக்க இவ்வழி உருவம் முதலிய உபயோகமாம்:—

தலைகீழாக மற்றொரு உதாரணம்:—தெரிந்தவைகள்:— $a_1 = 576$, $b = 240$ என்று கொண்டு மற்ற a , c க்களைக் கணிக்கவென்றால்:— மேற்காட்டிய படிக்கு:—

$$(CD = a = \frac{(AB)^2 + (AC)^2 - (BC)^2}{2(BC)}) \left\{ = \frac{(c_1^2 + b^2 - a_1^2)}{2a_1} \right\} \therefore$$

இங்கு.

$$c_1^2 = 624^2 = 389376, \quad b^2 = 240^2 = 57600, \quad a_1^2 = 576^2 = 331776; \quad 2a_1 = 1152;$$

$$\therefore CD = (a) = \frac{(389376 + 57600 - 331776)}{1152} \\ = \frac{(446976 - 331776)}{1152}$$

$$= \left(\frac{115200}{1152} \right) = 100 \therefore a = 100 \text{ என்பது.}$$

மற்ற கர்ணங்களாகிய (AB) (AD) (BD) இவைகளைத் தெரிந்த கோடி புஜ னகாபத்தால் கணிக்குக ○

இவ்வழிக்கு, முன் திறைஞ்சிக வழிக்கும் மெருங்கிய சம்பந்தங்களைக் காண்க ○

குறிப்பு:— ஆறு முதலிய தாண்டமுடியாத (ஜலமுள்ள) இடங்களை - B C - ரைகையாக அமைத்து மேற் கூறியபடி (தக்கோண உருவமடைந்து); (BC) யைக் கணிக்கச் சுலபமாம்:

மற்றும் வருவன விவரிக்கிறேன்:—

குறிப்பு:— இவ்வித சேஷதரணிதங்கள்; கோல கணிதத்துக்கே வெகு ஆதாரம். இவ்வித மேற்படும் நிறை ருசிக் கணிதம் கணிதப்ரபஞ்சத்துக்கே வ்யக் தர்வ்யகத்த ரூபமாயுள்ள கடவுள்பே லாம்: இன்னும் விரிக்கிற்பெருகும்:—

வேறு:—

ஓர் கோக்கோண முக்கோணத்துடைய கோடியும் கர்ணமுஞ்சேர்ந்த துகையும் புஜமும் தெரிந்த விடத்தில், கோடிகர்ணங்களைத் தனித்தனியே கணிக்கும் வழி:—

கோடி கர்ணங்கள் சேர்ந்த துகையால் புஜவர்க்கத்தை வகுத்த ஈவு துகை; இதை ரண்டி டத்தில் வை, சூன்றை துகையில் சேர்த்துப் பாதிசெய்தது கர்ணமும், மற்றொன்றை துகையில் சுழித்துப் பாதிசெய்தது கோடியுமாக வரும்:—

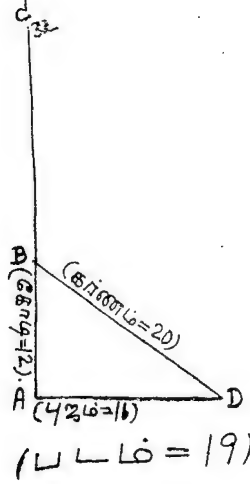
சமிகரணமிதற்கு:—

இங்கே:—

$$(\text{கோடி} + \text{கர்ணம்}) = A, \quad (\text{புஜ் தெரியு})$$

$$\therefore \left\{ \frac{(\text{புஜ})^2}{A} = B \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{கோடி} = \frac{1}{2} (A - B) \\ \text{கர்ணம்} = \frac{1}{2} (A + B) \end{array} \right\} \text{ என்றும்.}$$

இதற்கு உதாரணம்—



சமமான பூமியில் (32) அடியுயரமுள்ள மூங்கில் பரம் காற்றால் ஒடிந்து, தன்னடியிலிருந்து (16) அடிதூரத்தில் இதன் துனி விழுந்தது. ஒடிந்த இடம் ஸம்பந்தித்தே இருக்கிறது. ஆகையால் இதன் துனிக்கும் ஒடிந்த இடத்துக்கு முள்ள கர்ணரூபம் எவ்வளவு; ஒடிந்த இடத்திலிருந்து இது நிற்குமடியில் எவ்வளவு உயரம். என்பதைத் தனித்தனியே சொல்லென்றால்:—

இங்கு B சணிக்க:—; புஜ = 16

$32 = (\text{கோடி} + \text{கர்ணம்}) = A$

$$\therefore \frac{16^2 = 16 \times 16 = 256}{32} = 8 = B.$$

$$(\text{கர்ணம்}) = \frac{1}{2} (A+B) = \frac{1}{2} (32+8) = \frac{40}{2} = 20.$$

$$(\text{கோடி}) = \frac{1}{2} (A-B) = \frac{1}{2} (32-8) = \frac{24}{2} = 12$$

$$\therefore \text{கோடி} = 12, \text{கர்ணம்} = 20, \text{புஜ} = 16.$$

$$(\text{கோடி} + \text{கர்ணம்}) = 32 = (20+12);$$

$$(\text{கர்ணம்})^2 = \{ (20^2 = 400) \} = \{ 16^2 = 256 + (12^2 = 144) \}$$

என்றபடிக்கெல்லாம் சரியாகவே வரும்:—

வேறு:—

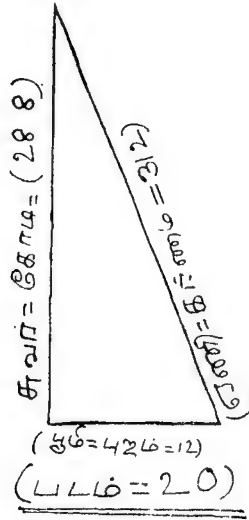
புஜகர்ண (ச்சேர்க்கையும்) யோகமும் கோடியுந்தெரிந்த இடத்தில், யோ (ஏ) சுமாயுள்ள கர்ணபுஜங்களைத் தனித்தனியே நிச்சயிக்கும் வழி:—

தெரிந்த புஜகர்ணயோகத் தகையால் கோடி வர்க்கத்தை வகுத்த நவை ஷே துகையில் சேர்த்துப் பாதிசெய்ய கர்ணமும், கழித்துப் பாதிப் பாதிசெய்ய புஜமும் வந்துவிடும் (இதுவும் முன் சொன்னமாதிரியேதான். ஆனால் ஸ்தான பேதம் மாத்திரமேயாகும்.)

இதன் சமீகரணம்:—

செங்கு கோடித் தி வளக்கமிங்கு:—

படம் 20 ஐப்பார்:—



இங்கு (புஜம் + கோடி) = துகை.

$$C = \begin{matrix} \text{கோடி} \\ \text{துகை} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{புஜம்} = \frac{1}{2} (\text{துகை} - C) \\ \text{கர்ணம்} = \frac{1}{2} (\text{துகை} + C) \end{matrix} \right\}.$$

இதற்கு உதாரணம்:— வினாபத்தில்:—

மேற் பரணையில் ஓர் நெல் களஞ்சியம் இதில் நெல் முதலிய தானியங் கொட்ட ஓர் சுவர்தில் (28.8) அடி உயரத்தில் ஜன்னல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இச்சுவத்தினடியிலிருந்து ஏற; ஜன்னலில் சாத்தி இருக்கும் ஏணி அடிவழியாகக் கணக்கிட்டால் மொத்தத்துகை = (43.2) அடிகள் உள்ளன. துகையால் கர்ண உருவில் சாத்தியிருக்கும் ஏணியின் நீளமென்ன, சுவத்தடிக்கும். ஏணியடிக்கு முள்ள அந்தரான பூமியாகிய புஜஉருவ நீளமென்ன சொல்லென்றால்:—

$$\text{துகை} = (43.2)! \text{ கோடி} = 28.8.$$

$$\therefore C = \frac{\text{கோடி} \times \text{கோடி}}{\text{துகை}} = \frac{829.44}{43.2} = \frac{(28.8)^2}{43.2} = 19.2.$$

$$(\text{கர்ணம்}) = \frac{1}{2} (43.2 + 19.2) = \frac{62.4}{2} = 31.2 = \text{ஏணி நீளம்}$$

$$(\text{புஜம்}) = \frac{1}{2} (43.2 - 19.2) = \frac{24}{2} = 12.0 = (\text{சுவர், ஏணியடி-நீள மிது}).$$

என்றாகும். மற்றவை முன்போலயியவும்:—

$$\text{இங்கே} = (43.2) = (\text{ஏணி} + \text{பூமி});$$

$$\text{ஜன்னல் வறை சுவருயரம்} = (28.8) \therefore \text{புஜருபபூமி நீளம்} = 12' \text{ அடி.}$$

$$\text{கர்ணருப ஏணி நீள் உயரம்} = 31.2 \text{ அடி என்பதாயுணர்க.}$$

வேறு:-

கோடி கர்ணந்தரமும், (கோடி கர்ண வித்யாசமும்) புஜமந் தெரிந்த விடத்தில் கர்ணகோடிகளைத் தனித்தனியே கணிக்கவழி:-

வர்க்கித்த புஜத்தை, கோடி கர்ண வித்யாசத்துவையால் வகு. ஈவை ஷெ அந்தரத்தோடு சேர்த்த துப்பாதி செய்ய கர்ணமும்; கழித்துப் பாதி செய்ய ஆக கோடியும் தெரியும்.-

ஷெக்குச் சமீ கரணம்:-

இங்குத்(துகை) = வகுக்கு மெண் = (கர்ணம் - கோடி)யும்; புஜமும்; தெரிந்தவைகளிரண்டு.-

$$D = \frac{(\text{புஜம்} \times \text{புஜம்})}{\text{துகை}} = \frac{(\text{புஜம்})^2}{\text{துகை}};$$

$$(\text{கர்ணம்}) = \frac{1}{2} (D + \text{துகை})$$

$$(\text{கோடி}) = \frac{1}{2} (D - \text{துகை})$$

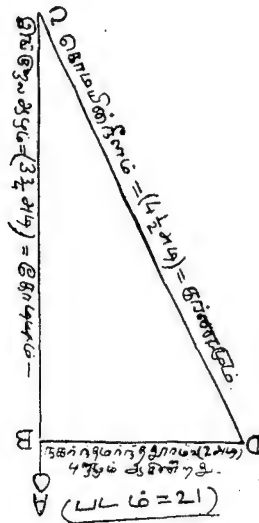
இதற்கு உ.காஹரணம்:-

(படம் 21)ஐக் கவனி.

ஓர் குளத்தில் ஜலத்திற்கு மேல் ($\frac{1}{2}$) அறையடி உயரமாகத் தாமரைப்பூ ஒன்று தெரிந்துக் கொண்டிருக்கிறது. சக்ரவாகம், க்ரௌஞ்சம் முதலிய பறவைகளால் வெகுவாய்க் கலக்கப்பட்டு இதன் காற்றின் வேகத்தினால்,

அத்தாமரைப்பூ; இருந்த விடத்திலிருந்து (2) இரண்டடி தூரத்தில் போய் முழுகி விட்டது. ஆகையால் ஓ காணிக்களை - நீ - தண்ணீரழுத்தையும், அப்பூவின் னுவிவறையிலும் கொடியின் நீளத்தையும் சொல்வாய்:-

குறிப்பு:- இங்கு தண்ணீர் ஆழமே கோடி. பூதுணி வறையில் ஏற்படும்; கொடி நீளமே கர்ணம். இக்கோடி கர்ணந்தரமே (கர்ண-கோடி) தான் ஜலத்திற்கு மேல் நின்ற தாமரை புஷ்பத்தின் உயரம் ($\frac{1}{2}$) அடியாகும்; இங்கிருந்து பூமுழுகிய தூரமான அடிகளிரண்(2)டே புஜமுமாகும்:



(பெ AB) = (DC - CB) = கோடி கர்ணந்தாம் = $\frac{1}{2}$ அடி -
(அகாவது ஜலத்துக்குமேல் தெரியும் பூவின் நுனிக் குமிய உபரம் ஆகும்).

ஆகையால் கர்ணமும் கோடியுங்கனிக்கும் உதாஹரணம்:—

இங்கு:— $D = (2^2 \div \frac{1}{2}) = 4 \times 2 = 8$.

கோடியின் = $\frac{1}{2} (8 - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ அடி

கர்ணத்தின் = $\frac{1}{2} (8 + \frac{1}{2}) = \frac{17}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$ அடி

ஆகையால் ஜலத்தின் ஆழம் அடி = $3\frac{3}{4}$ ம் கோடி. பூ நுனிவறை கோடி
நீளம் = $(4\frac{1}{4}$ அடி) கர்ணமுமாம் உருவம் இதற்கு சேஷ்தாம்: படம் 21 ஐக்கவனி.

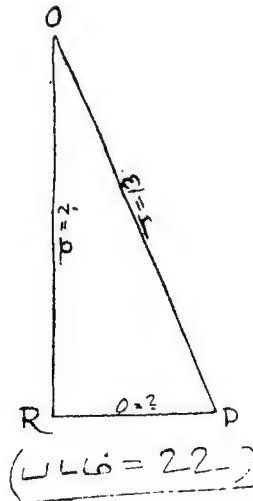
வேறு:—

கோடி புஜங்களின் வித்தியாசமும், கர்ணமுர் தெரிந்த விடத்தில் கோடி
புஜபரிமாணத்தைக் கண்டு பிடிக்கும் வழியிங்கு:—

கர்ண வர்க்கத்தை ரட்டித்ததில் கோடி புஜாந்தர வர்க்கத்தைக் கழித்த
மிச்சத்தின் மூலத்தில் பெ அந்தரத்தைக் கூட்டியும், கழித்தும் பாதி செய்தவை
களை புஜமும் கோடியும், தனித் தனியான வில்வரும்:—

இதன் சமீகரணம்:—

படம் 22 ஐ நன்கு கவனி



இங்கே:—

$$A = \left\{ (\text{ரட்டித்த கர்ணவர்க்கம்} - \text{கோடி புஜாந்தரவர்க்கம்}) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$A = \left\{ 2 (\text{கர்ணவர்க்கம்}) - (\text{கோடி} - \text{புஜம்})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\left\{ 2 (\text{கர்ணவர்க}) - (\text{கோடிபுஜாந்தரவர்க}) \right\}} = A.$$

$$\text{கோடி} = \frac{1}{2} \left\{ (A) + (\text{கோடி} - \text{புஜம்}) \right\}.$$

$$\text{புஜம்} = \frac{1}{2} \left\{ (A) - (\text{கோடி} - \text{புஜம்}) \right\}.$$

இதன் உதாரணம்:—

$$\text{இங்கு தெரிந்தது } (O P) = P = 13,$$

$$(OR - RP) = (p - O) = 7 = (\text{கோடி} - \text{புஜம்}).$$

$$(2 \times 13 \times 13) = 169 \times 2 = 338;$$

$$(p - O)^2 = 7^2 = 49$$

$$A^2 = (A \times A) \text{ லு } (338 - 49) = 289$$

$$\therefore A = (289)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(289)} = 17.$$

$$(p - O) = M = 7 \text{ இங்கு}$$

$$\text{கோடிக்கு} = \frac{1}{2} (A + M) = \frac{(17 + 7)}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$(\text{புஜத்தின்}) = \frac{1}{2} (A - M) = \frac{(17 - 7)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

\therefore கோடி = p = 12. புஜ = O = 5. என்பதாயுணர்க.

(வேறு):—

இங்கு புஜகோடிச் சேர்க்கையும் [(புஜகோடி யோக)

= (புஜ + கோடி) மும்]; கர்ணமூன்றெரிந்த விடத்தில், தனித்தனியே புஜமும் கோடியும் கணிக்கும் வழி:—

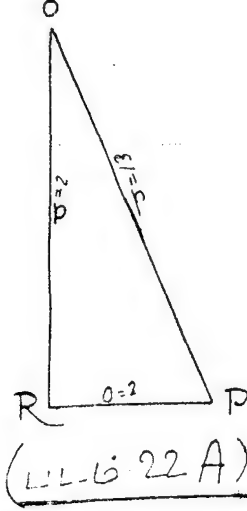
கர்ண வர்க்கத்தை ரட்டித்ததில் புஜகோடியோக வர்க்கத்தைக் கழித்து மூலித்ததை லு யோகத்தில் கூட்டியும் கழித்தும் பாதி செய்ததே புஜ கோடிகளுக்கு குடியித் தனித்தனியான அளவுகளாகும்.—

$$\sqrt{\left\{ 2 (\text{கர்ணவர்க்கம்}) - (\text{புஜம்} + \text{கோடி})^2 \right\}} = A.$$

$$A = \left\{ 2 (\text{கர்ண} \times \text{கர்ண}) - (\text{புஜம்} + \text{கோடி})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{இங்கு } (\text{புஜம்} + \text{கோடி}) = B \therefore$$

(பட்டம் 22 A ஐக் கவனி):—



$$\text{கோடி} = \frac{1}{2} (A + B),$$

$$\text{புஜம்} = \frac{1}{2} (A - B),$$

குறிப்பு :— இங்கு :—

$$17 = (OR + RP) = (p+2) = (\text{கோடி} + \text{புஜம்}). \quad \int \cdot PO$$

= கர்ண = 13 \therefore OR = p = ?, RP = 2 = ? என்பதற்கு உதாஹரணம் முதலியவைக் கவனிக்குக:—

உதாஹரணமிதற்கு :—

$$\text{இங்கு தெரிந்தகர்ண} = 13, (\text{கோடி} + \text{புஜம்}) = 17$$

$$\therefore (A) = \left\{ [2(13 \times 13) = (2 \times 169 = 338)] - [(17^2 = 289)] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (338 - 289)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7 = A.$$

$$B = (\text{கோடி} + \text{புஜம்}) = 17 \therefore$$

$$\text{கோடி} = \frac{1}{2} (A + B) = \frac{(17 + 7)}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

$$\text{புஜம்} = \frac{1}{2} (A - B) = \frac{(17 - 7)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

\therefore கோடி = 12, புஜம் = 5, கர்ண = 13. என்பதாகும்:—
(வேறு)

கோடியின் தெரியாத சிலபாகம் கர்ணத்தில் கூடியிருக்கச் சொச்சக் கோடியும் புஜமும் தெரிந்த இடத்தில், அந்த தெரியாத கோடியம்சம், ஸம்பூர்ணகோடி, கர்ணம் இவைகளின் அளவைக் கண்டு பிடிக்கும் வழியிற்கே காண்க:—

கோடியில் தெரிந்தபாகத்தை எட்டித்தோடு தெரிந்த புஜத்தைக் கூட்டிய தனால், புஜத்தைத் தெரிந்த கோடியின் பாகத்தால் பெருக்கியதை வகுத்த ஈய்வே தெரியாத (தாகிய) கோடியின் (நீளம்) உபரம் ஆகும். இதைக் கோடியிலும் புஜத்திலும் (சேர்த்ததே) கூட்டிப்பதே (சரியான) கோடியும் கர்ணமுகும்:—

இதன் சமீகரணம்:—

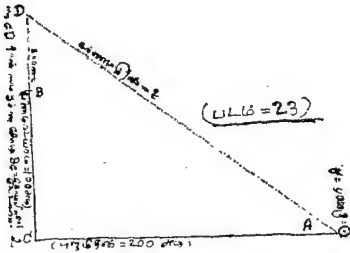
$$\left\{ \frac{(\text{புஜம்} \times \text{மிச்சமாய்த் தெரிந்த கோடியாகும்})}{(\text{புஜம்}) + 2 (\text{தெரிந்தமிச்சக் கோடியாகும்})} \right\} = BD$$

எப்பூர்ணகோடி = (தெரிந்த மிச்சக்கோடிபாகம் + BD) ;
கர்ணம் = (BD + புஜம்). என் பதாகும்.

இதற்கு உதாஹாணமான வினா:—

ஓர் குரங்கானது (100) அடி உயரமுள்ள பனைமறந்திலிருந்து கொஞ்சம் உயரமாக நோராய்க்கிளம்பிக் கர்ண (குறுக்கு) வழியாகவே அம்மறத்திற்கு (200) அடி தூரத்திலுள்ள (வாபி) கிணற்றையடைந்து ஜலம் குடித்தது. என்றால்:—

அக்குறங்கு அம்மறத்துக்குமேல் உயரக்கிளம்பியதூரம் என்ன? கிணற்றை நோக்க ஆரம்பித்த இடத்தில் இருந்து (கர்ண வழியாய், ஏற்படும்) கர்ண மானதின் கிணற்றின் தூறமென்ன? வென்றால்:—



குறிப்பு.—கோடி = (CB + BD).

தெரிந்தகோடி தூரம். அல்லது உயம் = (CB.)

கர்ணம் = DA; A = கிணர்.

மற்றவைகளை விவரணத்தில்பார்:—

இங்கு தெரிய வேண்டியவைகள்.

BD = உயரக்கிளம்பிய நீளம்.

AD = கர்ணம்:—

CD = (CB + BD) = இதே சரியான கோடி.

புஜம் = 200 = CA;

(CB) = CDயில் தெரிந்ததாகிய கோடியின் சிலபாகம். ஆகும்.

ஆகையால் பொதுவான ஸமீகரணம்.

பொதுவாக:—

உயரக்கிளம்பிய தூரம் தான் = BD. (இதற்குச்)

$$= \left\{ \frac{(\text{மரக்கிணர்தரபூமியானது}) (\text{தெரிந்தமிச்சக்கோடிபாகம்})}{(\text{மரக்கிணர்தரபூமிபுஜம்}) + 2 (\text{தெரிந்தமிச்சக்கோடிபாகம்})} \right\}$$

$$\therefore BD = \frac{(AC)(BC)}{(AC) + 2(BC)}; \text{ ஓர் } BD = \text{உயரக்கிளம்பிய} = (உ. கி.)$$

$$\therefore \text{ஷை} = (BD) = (உ. கி) = \left\{ 2 \frac{(\text{பனைமரம்}) (\text{மரக்கிணர் தூரம்})}{(\text{பனைமரம்}) + (\text{மரக்கிணர் தூரம்})} \right\}$$

$$\therefore BD = \text{உயரக்கிளம்பிய தூரம்} = \frac{(100 \times 200)}{2 \times 100 + (200)}$$

$$= \left\{ \frac{20000}{400} \right\} = \frac{200}{4} = 50 \text{ (அடி)} = BD; -$$

$$\text{கோடி} = (CB + BD) = CD.$$

$$\therefore \text{ஷை கோடி} = (100 + 50) = 150.$$

$$\text{கர்ணம்} = AD = AC + BD.$$

$$= 250 = (200 + 50) \text{ என்பதாகும்.}$$

வேறு:—

உயரத்தில் வித்யாண மான இரண்டு ம.ங்களின் நுனிகளிலிருந்து இவைகளின் எதிரடிக்குக் கர்ண கதிராக க்கயிறு (தூல்) கட்டினால் கர்ண வழியில் இவ்விரு நூலும் சேறு மிடத்திலிருந்து, பூமிக்கு நேர் செங்குத்தான ஆழம் (கீழிருந்து மேலானால் உயரம்) என்ன.

இந்த பூமியில் தானத்திலிருந்து இருமா அடிகளின் (பூகண்ட) தூரமென்ன வென்றால் இதற்கு வழி:— முதலில் சேஷ்தா தரிசனம் செய்ய வேண்டியது,

(பக்கத்திற் காட்டிய படம் 24ஐக் கவனி.)

இதில் தெரிந்த அவயவங்களாவன:—

உயர வித்யா முன்ன இருமங்களும், இதன் தூர (அந்தர) மும்:—

$$\text{பெரு மர உயரம்} = (AB) 15. \text{ ம.} -$$

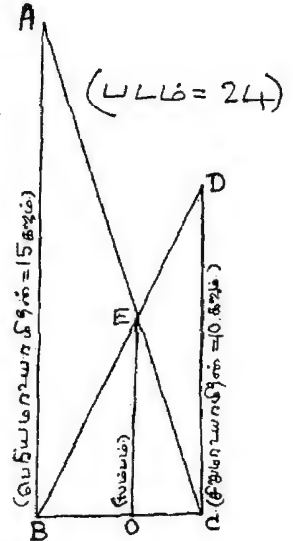
$$\text{சிறு மர உயரம்} = (CD) 10. \text{ ம.} -$$

$$\text{இவ்விரண்டின் தூரம்} = (BC) = 5. \text{ ம.} -$$

ஆகத் தெரிந்த இம் (3) மூன்றிலிருந்து:— ஒன்றுக் கொன்றின் நுனிக் கு மடிக்குங் கட்டிய இரு கயிறுகளின் (ஊம் பாதத்தில்) சேர்க்கையில் (E) ல் இருந்து பூமியில் (O) ன் ஆழ மென்ன அகாவது $OE = ?$, $BO = ?$, $CO = ?$, இதரமான $AC = ?$, $BD = ?$, $BE = ?$, $EC = ?$, என்றால் இதைக் கணிக்கும். விவரம்:—

- இதன் சில உருவுக்குப் பொது வழி:—

பெருமரத்தை சிறுமரத்தால் பெருக்கியதை ஷை பெரு சிறுமரச் சேர்க்கையால் வகுத்த ஈவு (EO) என்கிற லம்பமாகும். (ஷை பெரு சிறு மரச்சேர்க்கையையே வகுக்கு மெண்ணாகாஹுரமாகக் கொள்ள வேண்டிய திங்கு).



மாத்தூரத்தை (B C)ஐ, பெரிய மாத்தால்பெருக்கி ஹாத்தால் வகுக்க
பெருக்கண்டம் (O B) தெரியும். மாத்தூரத்தை சிறுமாத்தால் பெருக்கி ஹாத்தால்
வகுத்த ஈவு சிறுபுக்கண்டம் (O C) தெரியும்.

(மற்ற ஸாதனங்களை ஸமீ காண உதாஹரணங்களில் காண்க):—

ஸமீகரணங்களும், உதாஹரணங்களும்:—

$$(1). (EO) = \frac{(AB) \times (CD)}{(AB) + (CD)} = \frac{15 \times 10}{15 + 10} = \frac{150}{25} = 6 = (\text{இலம்பம்})$$

$$(2). (BO) = \frac{(BC) \times (AB)}{(AB) + (CD)} = \frac{5 \times 15}{15 + 10} = \frac{75}{25} = 3 = (\text{பெருக்கண்டம்})$$

$$(3). (OC) = \frac{(BC) \times (CD)}{(AB) + (CD)} = \frac{5 \times 10}{10 + 15} = \frac{50}{25} = 2 = (\text{சிறுபுக்கண்டம்})$$

$$(4). (AC) = \left\{ (AB)^2 + (BC)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (15^2 + 4^2)^{\frac{1}{2}} = (225 + 25)^{\frac{1}{2}} \\ = (250)^{\frac{1}{2}} = \left(15 \frac{8114}{10000} \right) = 15.8114.$$

$$(5). (BD) = \left\{ (CD)^2 + (BC)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (10^2 + 5^2)^{\frac{1}{2}} = (100 + 25)^{\frac{1}{2}} \\ = (125)^{\frac{1}{2}} = (11.18) = 11 \frac{18}{100}.$$

$$(6). EC = (OE^2 + OC^2)^{\frac{1}{2}} = (6^2 + 2^2)^{\frac{1}{2}} = (36 + 4)^{\frac{1}{2}} = (40)^{\frac{1}{2}} \\ = 6.325.$$

$$(7). BE = (OE^2 + OB^2)^{\frac{1}{2}} = (6^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (36 + 9)^{\frac{1}{2}} = (45)^{\frac{1}{2}} \\ = 6.708$$

சுலபமாகவே (கர்ணங்கள்) ஸாதனஞ்செய்ய குணகங்களின் ஸாதனம்:—

$$\left(\frac{AC}{AB} = \frac{15.8114}{15} = 1.0541; \frac{AC}{AB} = \frac{15.8114}{5} = 3.1623; \right.$$

$$\left. \frac{11.18}{5} = 2.236. \right), \text{ கடினமானவர்க் மூல கணிதமில்லாமலே; மேற்கண்ட}$$

ஸஜாதி (ஒரேஜாதி) யான- $\angle OBE = \angle CBD$; $\angle BCA = \angle OCE$
ஆகிய த்ரிகோண சேதிரங்களிலடங்கிய (CA, CE), (BE, BD) ஆகிய கர்ண
ரேகைகளைக்கணிக்க:—

உதாரணமிங்கு:—

$$(CA) = \frac{(CE) \times (CB)}{(OC)} = \frac{(CE) \times (BA)}{(OE)}$$

$$= \left(\frac{6.325 \times 5}{2} = 15.8125 \right) = \frac{15}{6} \times 6.325.$$

$$= 15.8125.$$

$$\text{கே.} = \left(\frac{5}{2} \times 6.325 \right) = 15.8125.$$

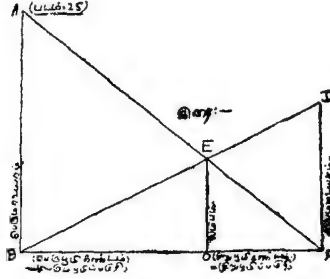
இவ்விதமே :—

$$(BD) = \frac{(BE) \times (CD)}{(OE)} = \frac{(BE) \times (BC)}{(BO)}$$

$$= \left(\frac{10}{6} \times 6.708 \right) = \left(\frac{5}{3} \times 6.708 \right) = 11.18 \text{ என்றாகும்.}$$

முன்வர்க மூலகணிதத்தாலும் கே. CA = $(250)^{\frac{1}{2}} = 15.8114$;

BD = $(125)^{\frac{1}{2}} = 11.18$ என்று வந்ததைக் கவனி. அவ்வளவு கடினத்தை; சிறிய மூலத்தால் பெரியதைச் சுலபமாகக் கணித்து முடிக்கலாகும் :—



இந்தப் படத்தின் (25ம் படத்தின்) கண்ணுள்ளவைகள் படம் 26, 27ல் (இதன் கீழ்) கண்ட கேட்கார்ப் படிக்கு, இரண்டு த்ரிபுஜ த்ரிகோண கேட்காரங்கள் சேர்ந்திருப்பதாகும்.

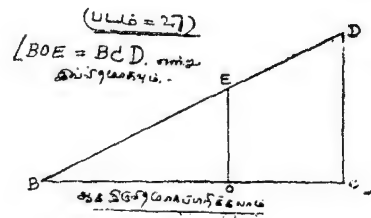
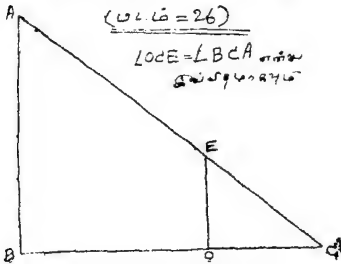
(விவரணம், படம் 26, 27ஐக் கவனிக்கவும்)

இந்த கேட்காரத்தைப் பற்றி இன்னும் கவனிக்க வேண்டிய விஷயங்கள் :—

மேலே (படம் 25ல்) காட்டிய கேட்காரத்தை ஸமஜாத்ரி கோணங்கள் டங்கிய இரண்டு கேட்காரங்களாகப் பிரிக்கலாம் :—

எவ்வித மென்றால் :—

கேட்கார உருவமாகவே இவைகளைக் காண்பிக்கப்படுகிறது :—

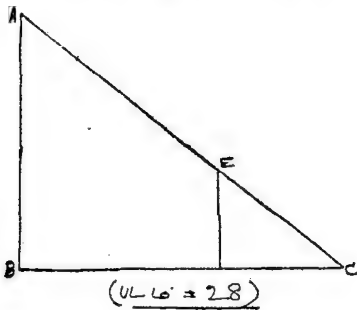


குறிப்பு:—

$\angle OCE = \angle BCA$, என்றும்

$\angle BOE = \angle BCD$, என்றும்

இருவிதமாக வேறுபடுத்தக் குறிப்பில் காண் பித்தபடிக்கு ஒன்றுக் கொன்று எந்த விதத்திலும் (முக்கோணங்களும்) முன்றுவித கோணங்கள் ஸாய்மமும், புஜங்கட்கு குறிய நியம ரேசைகள் வித்யாஸமாவதோடு ஒன்றுக்குள்ளொன்று அடங்கியிருப்பதாலும் (வர்க்க மூலகணிதக் கடினமில்லாமல்) திறை ரூசிகத்தால் உதாரணத்தில் கண்டவாறு சுலபவாகவே கணித்து விடலாம். இவ்வித கேஷத்ர ஸமத்வத்தைக் கொண்டே நம் பூர்விகர்கள் (3438) 'கலைகளைக் கொண்ட த்ரிஜ்யா என்கிற (விபாஸார்த்தமாகிய); (21600) கலைகள் கொண்ட வட்ட அறைவிட்ட மாகிய; கர்ணத்தைக் கொண்டு (வேற்றுமையையே எப்போது மண்டபாததாகப் பாவிக்குங் கர்ணத்தைக் கொண்டு) 0° முதல் 90° வரையில் ஏற்படும் ஒவ்வொரு பாகாதி காலதிகளுக்கும், கோடி புஜங்களாக அபையும் புஜஜ்யா, கோமஜ்யாக்களை நிச்சயித்து இவைகட்குறியபடி ஸம்பந்தித்துப், பெரிய த்ரிகோணமாக மேலே காட்டியபடி (கடையும்) பெரிய த்ரிகோணத்துக்குறிய கர்ணத்தை ஸ்பர்ச கர்ணமாகவும், புஜமாவதை ஸர்சரேசையாகவும், மற்றோர் புஜத்தை ஸதாகாலமும் வித்யாஸமடையாத த்ரிஜ்யா ஆகிய அறை விட்டமாகவும் கணித்து இவைகளை கிரக கணித உபயோக உபகரணமாகவும், இதரமான த்ரிகோணமிதி முதலிய வியவகாரம் முதலியவுக்குறிய உபகரணங்களாகவுங் கொள்ளுகிறார்கள். இவ்வுபகரணங்களைக் கொண்டே (அடையக்கூடாத) எவ்விதத்திலும் போக முடியாத இடங்களின் தூரம் முதலியவைகளையுமளக்க இயலும் என்பது வெகு விளக்கமே.



இந்த ($\angle ABC = \angle EOC$) என்றதாகிய இந்த பக்கத்தில் காட்டிய கேஷத்ரத்தை (82)ம் பக்கத்தில் காட்டிய (படம் 17-18 ஆக அமைந்த) கேஷத்ரப்படிக்கும் அமைக்கலாம்.

மற்றுமிந்த கேஷத்ரத்துறிய விசேஷ விளக்கம்யாது; எவ்விதம் மாறுபாடாக ஒரே சமத்வத்திலமையுமென்றால்:—

(படம் 29 ஐயும் கூடவே கவனி)

$\angle COE = \angle COE$, இவ்வொன்றும் மாறுபாடில்லை.

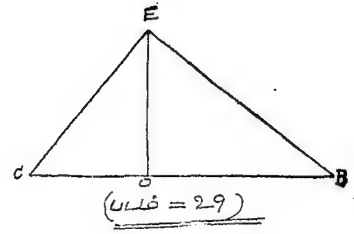
மற்றைய:—

OB, BA, AE, என்கிற புஜரேசைகளை மாறுபாடுடையது.

எவ்விதத்தில் என்றால்:— (OB) க்குச் சரியாக இதில் (EB); ஆகவும், (CB) க்குச் சமம் (AB) அல்லது (AE) ஆகவுமமைகின்றது. நன்கு கவனிக்க, இன்னும் நிரூபிக்கப்பட்டபடி:—

{ (படம் 28ல் உள்ள } { (படம் 29ல் உள்ள }
 { கோணங்களுக்கு } { கோணங்கள் சமம் }
 (கீழ்க்கண்டமாதிரியில்)

$$\begin{array}{rcl} EC & = & EC. \\ EO & = & EO. \\ OC & = & OC. \\ OB & = & EB. \\ (AB=AE) & = & CB. \end{array}$$



என்றபடிக்கமைவதைப்பரிசீலித்துப்பார். மேலும் தில்மைந்த கோணம்:—

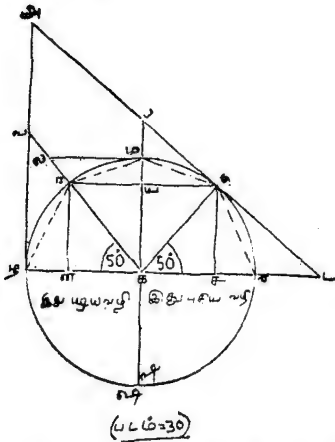
$$\angle (COE, \angle BOE) = 90^\circ$$

$$\angle CEB \text{யும் } 90^\circ$$

[என்பதைபுங்கவனித்தலவசியமாம்]

(இவ்விதமமைந்த கோணத்தை முக்கிய-ஆதாரமாகக் கொண்டே நவீன முறையில் த்ரிகோண மிதி கணிதத்தை மேலே கூறியபடிக்கெல்லாம் நடத்தி வருகிறார்கள். இவர்கள் மேலே கூறியவட்ட அரைவட்டத்தை (3438) க்குப் பதிலாக (1) ஒன்று என்று கொண்டு இதற்கே புதுகோடுகள் நித்சயித்து ஸ்பர்ச கோண (டான்ஞன்ட்) ஸ்பர்சகர்ணம் (ஸீக்கன்ட்) முதலிய நிறுமித்து, இதிலிருந்து; காகதி முதலிய த்ரிகோணமிதி கணிதங்களையும் வழங்கிவருகின்றனர்.)

அவ்வுருவங்களில் மாறுபாடாகவையுமிதையும் நன்கு கவனிகத்தெரிய வருமென்பது:—



விசேஷக்குறிப்பு:—

இவ்விதமமைந்த (இருவழிப்படிக்கு மமைந்த) கோணங்களினுடைய ஸாய்ந்திதனால் வெகு ஆச்சரிய யுக்திக்கமையும் பற்பலவிதங்களான கணித ஸாய் முறைகளுமேற்படுகின்றன. அவைகளை விவரிக்கப் புகிலிங்கேபெருகும். ஆகவே:—

சில ஸாய்ங்களைமாத்ரம் பொதுவழியில் கவனிக்கவும். அதிலுஞ் சிற்சில உபகாண விவரணைங்களை விளக்கம் செய்யப்பட்டிருக்கின்றது:—

அவ்விரு உருவங்களையும் [படம் (28, 29) போன்ற உருக்களையும்] ஒரே வட்டத்தில் நன்குணுமாறு விளக்கப்படுகின்றது. அவைகளை

வெகு நிதானமாகக் கவனிக்க வேண்டியதே அதிக அவசியம் ஆகும்:—

இவைகளின் ஒன்றுக்கொன்றின் வித்தியாசமில்லாத ஸம்பந்தங்கள் எவை எவைகளென்றால்:—

அவைகளாவன:—

மேலே (படம் 30ஐ நன்கு கவனி) காட்டப்பட்டிருக்கும் (௦ வடிவம்) என்கிறவட்டத்திற்கு (கத) என்கிற அறைவிட்டம் (கவ) விலிருந்து (சத) உயரம் கிளம்பினால் (க) என்கிற வட்ட மத்யகேந்திரத்தில் (50°) ஐம்பது பாகைக் கோணம் உண்டாகிறது, இதையே (வத) என்கிற வில்லாகிற வளைவுக் கோட்டி னிடம் கணக்கிட (50°)யாக கொண்ட சாபாம்சம் என்று சொல்லுவார்கள். இந்த (வத) சாபாம்சத்துக்கு (முர) சாபாம்சம் இந்த இடத்தில் சரியே.

இனி சொல்பவையாவும் ஸாலரேகையை (கோட்டை) அனுசரித்தவைகளே:—

[(கோணம் (அல்லது சாபம்) = 50°) ஐம்பதுபாகைக்கு இங்கே]:—

1. (கத = கர) கர்ண (அரைவிட்ட). மானால் இதற்கு
2. (சத = ரன = கய) புஜம், (யத = யர) = (கச = கன) கோடி.
3. (சவ = னமு) = உஜ்யா, (யம) = கோடி உஜ்யா;
4. (வத = ரமு) = ஜ்யோஜ்யாகர்ணம் = (கார்டு).
5. (தம = ரம) = கோடிஜ்யோஜ்யாகர்ணம் = (குகார்டு).
6. (டத = முவ) = புஜஸ்பர்ச்சரேகை,
7. (தப = மல) = கோடிஸ்பர்ச்சரேகை
8. (கட = கவ) = புஜஸ்பர்ச்சகர்ணம்
9. (கப = கல) = கோடிஸ்பர்ச்சகர்ணம்

இங்கே விசேஷம்: யாதெனில்:—

(க) என்ற கேந்திரத்தில் எற்பட்ட கோணமாகிய (50°)பாகையும், (ப)

அல்லது (அ) ஸ்தானத்திலும், இவ் (50°) வன்பதின் கோடி கோணமாகிய நார்பது ($90^\circ - 50^\circ$) = (40°) பாகையும், (ட) (வ) ஸ்தானங்களிலும், இருப்பதைக் காணலாம்.

படத்தில் காண்பித்தபடிக்கே இருசார்பார் கேஷத்ரங்களையுங்கொண்டால் தான் (அ) என்கிற ஸ்தானமேற்படுகிறது. அப்போதும் (மு) ஸ்தானத்தில் நேர்க்கோண முக்கோணத்துக்குரிய கர்ண ஸம்முக கோணம் தொண்ணூறு (90°) பாகையே ஆகும். ஏதாவதோர் மதத்தைக் கொண்டால் (டப) என்கிற கர்ணத்தோடும், அல்லது (கவ) என்கிற கர்ணத்தோடுந்தான் நின்று விடும்.

இவ்விடத்திலடங்கியது ஸ்ரீமது பெரியத்திரேக்கோண தரிபுஜங்கள். ஸ்ரீமது (மபதி) கோண தரிபுஜங்கள். ஸ்ரீமது சிறியத்திரேக்கோணதரிபுஜம்: மற்றும் ஸ்ரீமது ஸ்ரீமது; ஸ்ரீமது; ஸ்ரீமது; ஸ்ரீமது இவைகள் யாவும் விஷமத்தரிபுஜ தரி கோணங்கள் என்பதாகிக்குக.

இனவகளிம்:—

$\angle(டர்து) = \angle(டகப) = \angle(டதுஅ)$ என்பவைகள் பாஸ்பாம் ஸாம்யமுடைபு
வைகள். $\angle(+னா) = \angle(குழவ)$ இவைகளும், $\angle(கயர) = \angle(கமல)$ இவை
களும், ஸம்யகஞென்று ஸாம்யமே:—

வினாறுபாற்றிவள்ள ஸ்பர்சு (டத) ரேகையும் கோஸ்பர்சு (தப) ரேகையும்
சேர்த்திருப்பதால்தே கர்ணம், இதற்கு (தட) புஜஸ்பர்சு கர்ணம் புஜம், (கப)
கோடிஸ்பர்சு கர்ணம் கோடி என்பதாம்.

இருமதத்தைப் பற்றி தழுவிப்படிக்காகில்:—

$$\text{கூர்ணி} = \left(\frac{\text{கூட}}{\text{கூட}} \right) = \left\{ \frac{(\text{கூட}) (\text{கூட})}{(\text{கூட})} \right\} = \left\{ \frac{\text{கூட} \times \text{கூட}}{\text{கூட}} \right\}$$

$$\text{கோடி} = (\text{பூஜி}) = \left\{ \frac{\text{சுத} \times \text{பூட}}{\text{சூட}} \right\} = \left\{ \frac{\text{பக} \times \text{பூட}}{\text{கூட}} \right\}$$

$$p_{\text{உம்}} = (p_{\text{ட}}) = (p_{\text{உஸ்பர்சு கர்ணம்}} + \text{திரிஜயா}). = [(க_{\text{ட}}) + (ப_{\text{க}})]$$

இதனுடைய பகுப்பில் வெகு வெகு விநோதங்களுள் ஸ்ரீகேதாமானவர்களேற்பட்டிருக்கிறார்கள். இந்நோடு விநித்தனம், ஆனாலும் ஸ்ரீ விசேஷயிங்கு அவசியங்கானவேண்டியது:—

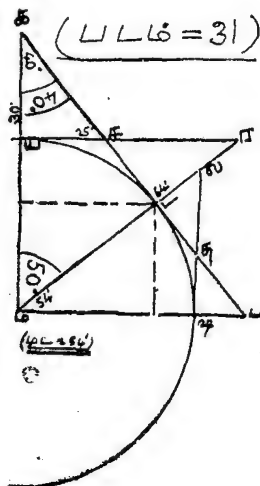
அதாவது

இ நுமதங்களிலு மெற்பட்ட ரோகங்களில் சிலனைகளை ஒரேபக்கத்தில் (ஒர் பாதத்திலேயே) அடக்குவோமெனான்.—

[பட்டி = 31 ஐப் போல் கிடைத்தல் சிவசுந்தரிபதிக்கமைபும்:—

நம்முடைய முக்கியப் பாயத்தனத்தினால் தெரிந்த:—

படம் 31ஐ நன்றாகக் கவனிக்குக:—]



[இதைப்பற்றிய மற்றயஸகல விவரணகளும் பெதுவழியில் காணத்தக்கவை மற்றும் இதைச் சம்பதித்தஜ்யாதி (ஸைன்முதலிய) மூலஉபகரணத் தி அவயங்களை முன்கேட்கத்திலேயே நன்கு விவரணஞ்செய்யப்பட்டதாகும்.]

(கய) ரேகையையும் (க) ஸ்தானகோணத்தையும், அல்லது (ஷப)ரேகையையும் (ப) ஸ்தான கோணத்தையுங்கொண்டு தெரியாததாகிய அரைவிட்டமான (மட) [= (மஷ) = (மய)] வைக்கணிக்கவேண்டிய விதம்:—

நன்றாகப்பூமிதிஸாதனத்தில் கூறப்படுகின்றது.

அஃதுஎவ்வாறெனில்:—

பூமியின் மேற்பரப்பிலுள்ள ஓர்மலையின்உச்சியில் ஏறி நின்றபோது நம் கண்ணின் ஸ்தானத்தை (க) என்கிற ஸ்தானமாகக் கொண்டால் (யக) என்பது பூமிமேலிருந்து நம்கண் வரையிலுள்ள உயரம். இது சலபத்தில் தெரிந்துக்கொள்ளக்கூடியதே (க) விலிருக்கும் கண்ணைச் சமீபத்தில் இருக்கும் (கடல்மறைபுறத் தூரத்தை) அநாவது (கடலும் வானமும் தொகிறதூரத்தை) நோக்கிக் கோணமானியால் (வெகுசூக்குமமாகிய கோணமானியாக இருத்தல் வேண்டும்) அளக்க (அக்ஷணரேகைபைத்தொடும், கீழிருந்து மேல்நோக்கும் கோணம்) ஏறு கோணம் ஏற்படும்: (இதை பாசை கலை விகாலை பர்யந்தமும் வெகுசூக்குமமாக அளக்கவேண்டியதாகும்: இல்லையேல் பிசுகும் ஸ்தாலத்துக்குத் தக்கபடி) பிறகு த்ரிகோணமிதி விகிதப்பதக்கப்படிக்கு அவ்வித மேற்பட்ட ஏறு கோணத்துக்கு ஸ்பர்சகர்ணமும் (ஸ்க்கன்டம்), ஸ்பர்சரேகையும் (டான்ஞ்ஜன்டம்) தெரிந்து இவற்றை (யக) உயரத்தால் பெருக்கக் கர்ணமும் கோடியும் (யக) என்கிற புஜத்தினளவுக்கேற்படும். ஆகையாலிங்கு (க) என்கிற கோணத்திற்கு (யக) புஜம், (யச) கோடி, (கச) கர்ணம், என்பதை முதலில் தெரிந்து கொண்ட பிறகு:—(கச) என்கிற கர்ணத்தோடு (யச) என்கிற கோடியைக் கூட்டினால் இது (கசுடதப) என்கிற நேர்க்கோட்டில் (கட) என்கிறவறையிலுள்ள (கர்ண) ரேகை யைக் காட்டுகிறது. இந்த (ட) வில்தான் (90) தொண்ணூறு பாகையில் சந்திக்கும் (மட) என்கிற மற்றோர் புஜமிருக்கிறது. இதுதான் தெரியவேண்டிய (மட) வாகிய பூமியின் அரைவிட்டம்.

பிறகு (க) கோணஸ்பர்சரேகையால் (கட) வைப் பெருக்கியதே (மட) வாகும். (கட)வை (க) கோண ஸ்பர்சகர்ணத்தால் பெருக்க (அல்லது க-கோண கோடிஜ்யாவால் வகுக்க ஈவு), (மக) என்கிற கர்ணமும் வரும். ஆகவே (கடம) என்பது ஓர் ஸமத்ரிகோணமாயமைந்தது.

இதற்கும் உதாரணம்:— காண்க.

மேலே காட்டியபடத்தின் (௦.௪.௪)வை ஓர் வட்டமாகவும் வட்டத்துக்கு மேல் நின்றவனின்கண் உயரம் - (மக) = 30. ஆகவும், இங்கிருந்து கடல் கோடியாகிய ஆகயந்தொடுமிடத்தை நோக்குங் கோணம் (க°=40°) உடற்பது பாகையாகவுங்கொண்டு - வட்ட அரைவிட்டமாகிய - (மட)வைக் கணிக்க வேண்டுமென்றால்:—

இதற்கு வேண்டிய உபகாரணங்கள்:—

மேதமாடிகல் டேபிளைப்பார்க்க:—

(க⁰) ஸ்தானகோணம் 40°க்கு காஸ் = 0.766; டான்ஜன்ட் = 0.839.
ஸீகன்ட் = $(\frac{1000}{6766}) = 1.3055$; (யக) = 30. ம் ஆனால்:—

(கச) = [(யக) (க⁰ ஸீக்கன்ட்)] = $(30 \times 1.3055) = 39.2$;

(யச) = [(யக) (க⁰ டான்ஜன்ட்)] = $(30 \times 8391) = 25.2$;

(டச) = (யச)

∴ (கட) = (க⁰ச + யச) = $(39.2 + 25.2) = 64.4$.

∴ (கட) = 64.4.

(மட) = (கட) (க. டான்ஜன்ட்) = $(64.4 \times 8391) = 53.9$ இங்கு தெரிய வேண்டியது அரைவிட்டமாகிய (மட) தானாகையால் (மட) = 53.9 இவ்விதமே பூமியின் குறுக்களவியயாதியும் கணிக்க:—

(யக)வை, உயரமலைமேல் நிற்கும் மனிதன்கண் உயரம், (ட)வை கழிதிஜம் (என்கிய ஹாரைஸான்) ஆகவும் (டக), (யக) ரேகைசேரும் (க) கோணத்தையும் கணித்துக்கொண்டு மேற்காட்டிய உதாரணப்படி கிரிகை செய்தால்:—

பூமியின் அறைவிட்டம் = $(\frac{7927}{2})$ மைல்கள் என்பதும் வந்துவிடும்.

விசேஷம்:— வேதகணித விகிதப்படிச் சத்தமரய்க் கணிக்கப்பட்ட பூமியின் வெகுபெரிய அறை விட்டங்களாயமைந்த (உலகவ்யவகாரதிசைகட்க் குறிய):—

{ தென்வடல் நீளம் மைல்கள் = 3963.296 } இவைகள் இப்படிக்காரம்
{ கிழக்கு மேற்கு நீளம் மைல்கள் = 3949.791 }

இன்னும் விவரிக்க விஷயம் விரியுமென்பதால் இதை இதோடு நிறுத்தப் பட்டது.—

(வேறு):—

இனி இஷ்டப்படிக்கெல்லா மேற்படும் நிலத்தின் விசாலம் (குழி) கணிக்க விவரம்:—

அகலத்தை நீளத்தால் பெருக்கினால் நாற்சதுர விலப்பாப்பு (விலக்குழி) தெரியும், (1)

நீளத்தை அகலத்தால் பெருக்கிப் பாதிசெய்ததே முக்கோண உருக் கொண்ட நிலத்தின் குழியாயம். (2)

நாலுக்கும் மேற்பட்ட சதுரங்கள் கொண்டதானாலும், இவைகளுக்குள்ளே அடங்கியிருக்கும் முக்கோணங்களைக்கொண்டு மேற்கூறியவாறு கணித்து எல்லாம் சேர்க்க அந்நிலக்குழியுமேற்படும்:—

இதற்குச் சில உதாரணம்:—

இதுமேலுதாரம்

இது நீளம்,

1	2	3	4	
				1
1	2	3	4	2
5	6	7	8	3
9	10	11	12	4
13	14	15	16	

$\therefore (4 \times 4) = 16$ அகலம்
அல்லது $4^2 = 16$

(படம் = 32)

இதில் அகலம் நீளம் ரண்டும் 4 ஆவதால் $(4 \times 4) = (4)^2 = 16 \therefore$ இந்த நிலக்குழி = 16 ஆம்.

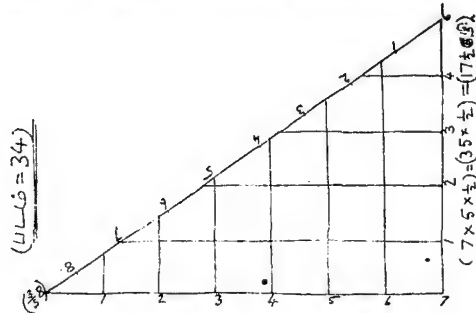
இதுமேலுதாரம்

1	2	3	4	5	6	
						1
1	2	3	4	5	6	2
7	8	9	10	11	12	3
13	14	15	16	17	18	

$6 \times 3 = 18$ அகலம் $(6 \times 3) = 18$ அகலம்

(படம் = 33)

இதில் நீளம் = 6, அகலம் = 3;
 $\therefore 6 \times 3 = 18$ இதற்கு இந்த 18 தான்குழியாகும்:—

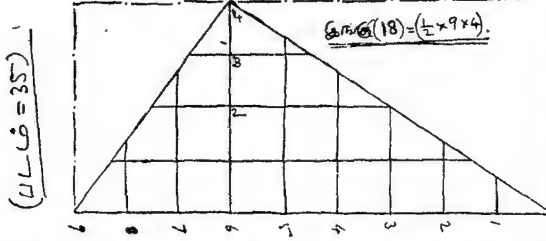


இந்த (படம்-34-ஆகிய) கோத்தாத்தை நன்குந்ரு நோக்குவதால் எவ்விதத் திலும் 7ரூம். 5ரூம். $(\frac{1}{2} =$ அரை), ஆவதால் இதற்குரிய விசாலக்குழியும் $= (7 \times 5 \times \frac{1}{2}) = 17\frac{1}{2}$. (பொதுவிதியில் மற்றவை)

(படம் 35)

இது நேர் முக்கோணம்; அகலம் அல்லது உயரம் = 5, நீளம் = 7

$$\therefore \text{இதன்குழியின்} = \frac{\text{உயரம்} \times \text{நீளம்}}{2} \therefore = \frac{5 \times 7}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2} \text{ குழி}$$



சந்தர்ப்பத்தைப்போல் இங்கு கண்ட அகலத்தை உயரமென்றுங்கொண்டு
ஷெ ஸூத்ரத்தை உபயோகிக்குக. இங்கு இதுதான் விசேஷம்.

படம் 34ஐப்போலவே இதுவும் ஸ்கலரேகை விகிதத்திலும் ஸாம்யத்தை
யடைவதால் இதற்கும் விசாலக்குழி ஸாதனத்திற்கு அதேவழியே ஆகும்.
(இவ்விதமே படம் 36க்குமாகும்)

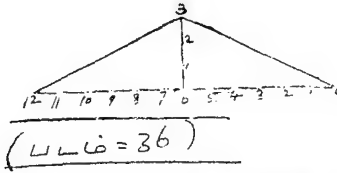
\therefore நீண்ட சதுரவிசாலக்குழி ரு

$$= (\text{நீளம்} \times \text{அகலம்} \times \frac{1}{2}) \text{ இங்கு} = (9 \times 4 \times \frac{1}{2}) = 18. \text{ ஆகும்:—}$$

இதற்கும் உயர=4, நீளம் = 9

$$\therefore \frac{4 \times 9}{2} = 2 \times 9 = 18. \text{ குழியாகும்.}$$

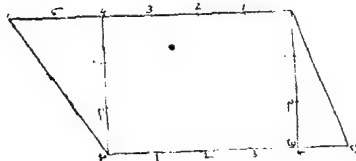
(படம் 36)



$$\text{இதற்கு உயரம்}=3, \text{ நீளம்}=12 \therefore \text{இதன் குழியின்} = \frac{12 \times 3}{2} = 6 \times 3 = 18.$$

(படம். 37. ஐக்கவனி)

(படம் = 37)



• முன் சொல்லிய கேந்திரங்களை மனிதில் வைத்து இதைபுங்கவனிக்க ரெ கேந்திரசாதக வழி நன்குபுலப்படும், மற்றவிவரம் பொதுவழியில் கவனிக்கக்:

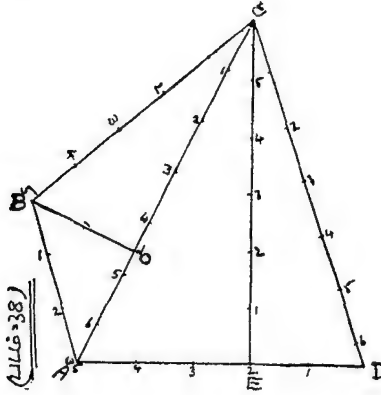
இதைப்போல் இன்னும் பலவித வித்யாசங்களிலும் கேந்திரங்கள் நிர்மானிக்கப் படும். அதற்குமிதேவழி:—

இவ்விதம் கேந்திரமமைந்தால் $\square DD_1; BB_1;$ என்று முதலில் கேந்திரத்தைப் பிறித்து நாற்சதுபாக்கிக்கொண்டு இதன் குழியோடு. மற்றய $(BB_1C), (DD_1A,)$ என்கிற இருதிரிபுஜ கேந்திரக்குழிபைக் கூட்டினால் $\square ABCD$ என்ற விஷமசதுர்புஜக் குழியும் வந்துவிடும்:

$$(\text{ஷ} ADCB \text{ குழி}) = [(D_1 B) (B_1 D) + \frac{(B_1 C) (BB_1)}{2} + \frac{(AD_1) (DD_1)}{2}]$$

என்பதாம்.

(படம் 38ஐப்பார்)



இவ்விதம் $(ABCD)$ என்ற விஷம சதுர்புஜமானாலும் இதில் $\triangle ACD$ ஒரு முக்கோணம் $\triangle ACB$ மற்றோர் முக்கோணம்:—

ஆகையால் $CE, OB,$ என்றலம்பனைக்கொண்டு முன்சொன்னபடி செய்து இருவிசாலக்குழிகளையுங் கூட்டினால் ஷ $(ABCD)$ என்ற கேந்திர (விசாலம்) குழி வந்துவிடுமென்பது உணர்க.

இவ்விதம் முதலில் தெரிந்துகொண்டு பின்பு யுக்தியால் எந்தவிதம் எத்தனைவித புஜங்களடங்கிய வெகு புஜ கேந்திரங்கட்கும் விசால மென்கிற குழியைவைக்கலாம்:—

குறிப்பு:— வெகு புஜ கேந்திரமாகில் இவ்விதம் $(ABCEAO)$ போல் கேந்திர ரேகைகள் நிச்சயித்து இதற்குறிய முன் வழிகளின்படி விசாலக்குழி ஸாதநம் செய்க-மற்ற விவரம் பொதுவிதிப்படிக்காம்.

$(ABCD)$ க்குறிய குழிகளின் (ஸமம்)

$$= \frac{1}{2} EC \times ED + \frac{1}{2} EC \times AE + \frac{1}{2} AC \times OB. \text{ என்றாகும்}$$

மற்று வருவன வெல்லாமிப்படிப்பார்க்குக்:—

இனிமேலிதைப் பற்றி விளக்கம் செய்யவேண்டிய அவசியமில்லை:—

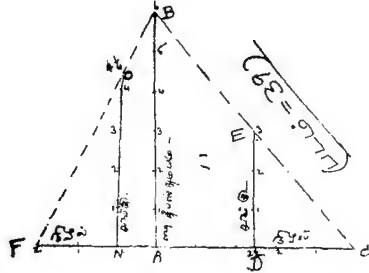
முதலில்:— வினவும் டீக்ஸ்தரம் ஏற்படுமா என்பதையும் கவனித்துக்
கிரிகை நடத்தவேண்டும்:

(வேறு)

இனி நிழல், நிழலைக்கொடுக்கும் ஸ்தம்பம் முதலிய (கருவி) இவைகளின் சம்பந்தமான வினாக்களிக்கு:—

(LJL'D 39)

இவ்வித (சாயை) ரிபூலுள்ள கேஷ்டாங்கள் வெகுவாய் திரிபுஷு ரூபமுள்ளவைகள் அங்கு சொன்ன கிரிகைகளை யுக்திப்படி இங்கும் செய்ய, ரிழல், சங்கு, ஸ்தத்தம்பம், சங்கு தீபார்தாம் (சங்கு தீபார்தராளபூம்) இவைகளைக்கணிக்கலாம்:—



இதன் சம்பந்தமான பொதுவுழிகள்:— கீழ்க்காண்க:

சங்கு நிழலின்றுனிக்கும், தீபஸ்தம்பத்தின் அடிக்குமுள்ள பூம்பிணந்தாத்தை
சங்குவால் பெருக்கியதை நிழலால் வகுத்த ஈவே தீப (தீபஸ்தம்ப) உயர
மாகும்:— (1)—

சங்கு நிழல் கண்டுபிடிக்க:—

சங்கு அடிக்கும் ஸ்தம்ப அடிக்கும் உள்ள அந்தர பூமியை சங்குவால்
பெருக்கி (சங்கு உயரத்தால் பெருக்கி) சங்கு கழிந்த தீப உயரத்தால் வகுத்த
ஈவே நிழலின் நீளமாகும்: (2) —

இதன் ஸமீகரணமிங்கு:—

இங்கு தீபஸ்தம்ப உயரம் = AB; சங்கு = DE. NO; நிழல் = NF, DC;
ஸ்தம்பச்சங்கு அந்தரூழி = AD, AN, ∴

$$AB = \frac{(DE)(AC)}{(DC)} = \frac{(NO)(FA)}{(NF)}$$

$$DC = \frac{(AD)(DE)}{(AB)-(DE)};$$

$$(NF) = \frac{(NA)(NO)}{(AB) - (NO)}.$$

மற்றவை இவ்விதம் யுக்திபோல் ஸாதனஞ்செய்துக் கொள்ளவேண்டியதாகும்:—

$$(AB) = \frac{(DE \times AC)}{DC} \therefore = \frac{24 \times 63}{25} = \frac{1512}{25} = 60\frac{1}{2}.$$

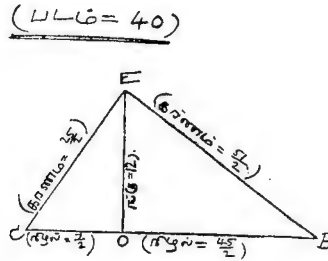
ஆகையால் தீப உயரம் = $60\frac{1}{2}$ ஆகும்:

$$(DC) = \frac{(AD \times DE)}{(AB - DE)} \therefore = \frac{38 \times 24}{(60 - 24)} = \frac{912}{36} = 25\frac{1}{3};$$

நிழலின் நீள = $25\frac{1}{3}$; என்பது

மத்தும் வந்தனவெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்க:—

இவ்விதச் சாயா கேஷத்ரத்தைப்பற்றிய சிற்சில விசேஷகணிதங்கள் கீழே:—



செ கேஷத்ரக்குறிப்பு:—

முன்கூறிய கேஷத்ரப்படிக்கு (AB) ஓர் விளக்குக் கம்பம் (CD) மற்றோர் விளக்குக் கம்பம், என்றும் (OE) யை செ (12 அடி) சங்குவுமாக நிருத்தினால் அப்போ:—

சங்குவின் உச்சியிலிருந்து (EC) என்ற ஓர் கர்ணம், (CO) என்ற இக்கர்ண நிழலும், (EB) என்கிற மற்றுமோர் கர்ணம், (OB) என்கிற இக்கர்ணத்துடைய நிழலும் உண்டாகும். என்பதை முதலில் உணர்க:—

(இங்கு இந்நிழல் கர்ணங்களை எப்போதும் [12 அடி] சங்குவைக்கொண்டே ஏற்படுத்திக்கொள்ள வேண்டியதாகிறது.)

இப்படிக்கணித்தக்கர்ணங்கள் = $(\frac{51}{2} = 25\frac{1}{2})$; $(\frac{25}{2} = 12\frac{1}{2})$. இக்கர்ண (நிழல்கள்) சாயைகளும் = $(\frac{45}{2} = 22\frac{1}{2})$; $(\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2})$:

$$\text{கர்ணந்தரம்} = (25\frac{1}{2} - 12\frac{1}{2}) = 13. \text{ அடி}$$

$$\text{சாயா (நிழல்)ந்தரம்} = (22\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}) = 19. \text{ அடி}$$

$$\text{சங்குவோ} = 12: \text{ அடி.}$$

இவ்விதங்களாக ஆகின்றது என்று தெரிய வந்தால் அச்சமயத்தில், CE, EB, என்ற இருவித கர்ணங்களும்; OC, OB என்ற இருவித நிழல்களும், எவ்வளவு அடிகள் உள்ளவைகளாகும் என்று ஒருவனால் வினவப்பட்டால்

தற்சயம்:— இவைகளைக்கணிக்கப் பொதுவான வழியையிங்குணர்க:—

இவ்விதக் கேள்விகளில் எப்போதும் (சாயாந்தர) நிழலந்தர எண் பெரிய தாயும் இதன்கர்ணந்தர எண் சிறியதாயுமாகவே இருக்கும் என்பது முணர்க:—

(இதற்குப் பொதுவிதி):—

தெரிந்தவைகளான:— நிழல் வித்யாஸ வர்க்கத்தில் கர்ண வித்யாச வர்க்கத் தைக் கழித்தமீச்சத்தால் $\{576 = (2 \times 12)^2\}$ ஐ வகுத்து ஈவுடன் ஒன்று சேர்த்து முலிப்பதால் கர்ணந்தரத்தைப் பெருக்கியதை, இரண்டிடத்தில் வை. சாயந்தரத்தை ஒன்றில் கூட்டிப்பாதி செய்ததும் மற்றொன்றின்மீல் கழித்துய் பாதி செய்ததும் இருவிதங்களான நிழல்கள் உண்டாகும் என்பதாம்.

இதன் ஸமீகாணமிங்கு:—

$$\left(\left\{ \frac{(576)}{(\text{நிழலந்தர})^2 - (\text{கர்ணந்தர})^2} \right\} + (1) \right)^{\frac{1}{2}} = \text{சு} = \text{குணகம்.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(இருவித நிழல்கள்)} \\ = \text{செ(வித்யாஸங் கொண்ட)} \\ \text{இருவித நிழல்கள்} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ (\text{கர்ணந்தரம்} \times \text{சு}) \pm (\text{நிழலந்தரம்}) \right\}$$

இதற்கு உதாஹரணம்:—

தெரிந்த சாயாந்தரம் = 19, கர்ணந்தரம் = 13, சங்கு = 12.

∴ தெரிய வேண்டிய செ வித்யாஸம் 19ஐக் கொடுத்த நிழல்களைக் கணிக்க:—

19ன் வர்க = 361, 13ன் வர்க்க = 169, இதன் வித்யாஸ = (361—169) = (192) இகற்கு செ (576)ஐக் குடுக்க ஈவு = 3, இதில் 1 சேர்க்க 4. இதன் மூலம் = 2. இதனால் 13ஐப் பெருக்க 26. இதில் சாயாந்தரத்தை (19ஐ) கூட்டிக் கழிக்க = 45, 7 இவைகளில் பாதிதான் தெரியவேண்டிய நிழல்களின் ஸமம் = $(22\frac{1}{2} = \frac{45}{2})$ ($3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$) அடியளவில் ஆகுமென்பதாம்.

பற்றும் வருபவை இவ்விதமே.

இச்சாயா (நிழல்) கேஷதரத்தில் மற்றோர் விசேஷமான கேஷதாஸாதன கணிதம்:—

படம் 41ஐப்பார்:—

இங்கு BO = சம பூமி நீளம்; BA; = விளக்குயரம்.

(BO, BD) = விளக்கு அடிக்கும், நிழல்களின் துளிகடக்கும் உள்ள நீளம்.

(CM = EN) = சங்குகள் = (12 அங்குல உயர முள்ளவை).

இங்கே தெரிந்தவைகள்.

(MC = NE) சங்குகளும், CD = நிழல் 8 அங்குலம். EO = மற்றோர் நிழல் = 12 அங்குலம். DO = நிழல் துளிகள் உள்ள பூமியின் தூரம்.

$6\frac{1}{2} = AB$ தீபம் (விளக்கு) உயரம் அங்குலம் அல்லது முழம்.

இங்கு முழும் 1க்கு அங்குலம் (= 24) ஆகும்.

இவ்வித கணிதவிசேஷமென்னவென்றால்:—

சூரியில் அளக்க முடியாத தூரம் உயரம் இவைகளோடுங் கணிக்க இயலு
மென்பது.

ஆனால் சந்திரன் முதலிய கிரகங்களின் ஸ்தான சம்பந்தங்கள் வெகு நூரம் தாண்டியும் நிழல்முதலிய வித்யாஸங்களை வேறாகக் கணித்தறிவது கஷ்டத்தில் ஆகின்றது. அதுபோலின்றி வித்யாஸமடையுந்தன்மை பெற்ற அவயவங்கள் எவைகளாக இருக்கவேண்டும் என்பதை முதலீ லுணர்வுகள்:—

வேறு (சில) விசேஷகணிதமிங்கு;—

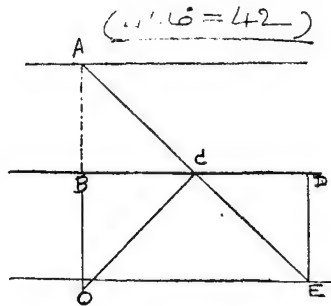
ஆற்றில் நிறையஜலம் போகும் போது இவ்வாற்றை ஜனங்களால் தாண்ட முடியாமல் போகும், தற்சமயம் ஆற்றினகலம் தெரியவேண்டுமேயானால்:—

இதற்குக்கணிக்க வேண்டிய விவரணம்:—

இச்சம்பந்த உருவ அமைப்பிற்கு:—

இந்த உருவப் படத்தில் உள்ளது:

(புட்டி: -42-ஐக்கவனி)



(AB) = அளக்கமுடியாததாகிய தெரியவேண்டிய நீளம்.

(BC = CD); (DE) இவைகள் தெரிந்துக்கொள்ளக்கூடிய இடங்களாகும்.
ஆகையால் (DE = AB) என்றாகும்.

விளக்கம்தான் இலம்:--

முதலில் Aஐ எதிர்க்காரமேல் தெரியக்கூடிய ஓர் அடையாள மாகிய அசைவற்ற பரம் அல்லது பாதை முதலியவைகளாகவோ அல்லது வீடு, கோயிலாகவோ கொள்க. பிறகு அதற்கு நேரே-தான் இருக்குமிடத்தில் நோக்கோட்டிலனாயும்படி தன் முயர்ச்சியால் Bயில் ஓர் அடையாளம் வை. (B)யிலிருந்து தன்னிஷ்டப்படி (C) தூரத்தில் மற்றோர் அடையாளமும், இந்த (C) லிருந்து (BC) அவ்வளவே தூரத்தில் Dயில் மற்றோர் அடையாளமும் வைத்தால்:-

(BC = CD) என்பது ஆகும்.

பின்பு, Dயிலிருந்து DE ரேகையிலேயே - Cஆல் A மறைவுபடும், வரையில் அல்லது ஒரே நேர்க்கோட்டில் ACE ஆகியவைகள் சம்பந்திக்கும் வரையில் பின்னோக்கினால் அப்போ ACE ஒரே நேர்க்கோட்டில்லமையும். இப்படி அமையும் E என்கிறவிடத்தில் ஒரு அடையாளம் வை: இதன் பிறகே உனக்கு ED எவ்வளவு நீளமோ அவ்வளவே நீளம் AB என்பது புலப்படும்.

ஆகையால்தான் $AB = DE$ என்று ஆயிற்று.

குறிப்பு:— இங்கே காட்டப்பட்ட (AB) ரேகையை:—

(17—18ம் படத்துக்குச்) ல் சொல்லிய (CB) = (a_1) ரேகையாகப் பாவித்துக் கணிதம் செய்தும் நீளம் நிச்சயித்துக்கொள்ளலாம்

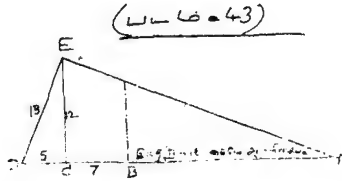
போக முடியாத குளத்தின் எதிர்க்கரை, ஏறிக்கால்வாய் முதலிய அகலங் களையும் இவ்விதரேகா கணிதப்படித் தெரிந்துக்கொள்ளலாம் சுலபத்தில்:—

(விசேஷம்:—)

(17—18-ம் படத்துக்குச்சொன்ன)கேடிரத்தின் கணித்தாலும் ரெ (AB)

போன்ற அகலங்கணிக்கலாம். இது கேவலம் கணிதத்தோடு கூடியதாகும், (அவ்வளவு சுகமிதற்கில்லை).

(படம் 43) ஐரன்குகவனி



இந்த கேடிரத்தில் நேர்க்கோண முக்கோணங்கள் இரண்டுள்ளன அவைகளாவன:—

$\angle DEA$; இங்கு $\angle E = 90^\circ$,

$\angle ECA$; இங்கு $\angle C = 90^\circ$

இதில் தெரியவேண்டிய கோடு — BA — இதுவும் ABCD ரேகையிலிருக்கிறது. இங்கு $(AB) = (AD - BD) \therefore$

இங்கு தெரியவேண்டிய கோடு (BA) அல்லது (DA) ரேகை பூராவும்:—

இங்கு தெரிந்தவை $\angle DCE = 5; 12; 13$ புஜங்களடங்கிய முக்கோணம் இதனால்:—

(DA) என்கிற $\angle (DEA)$ ன் ஓர் புஜமாகிய காண நீளங்கணிக்க:—

முன்சொன்னபடி:—

$$\frac{(DE)^2}{DC} = \frac{(DE)(DE)}{DC} = \frac{13 \times 13}{5} = \frac{169}{5} = 33.8 = DA$$

$$\therefore (AB) = \text{தெரிந்த } (AD - BD) = (33.8 - 5 - 7) = 21.8$$

இங்கு:—

$$BC = 7 \therefore BD = (7 + 5) = 12 (\therefore \text{முன்போல்})$$

$$\therefore AB = (33.8 - 12) = 21.8; \text{ என்பது}$$

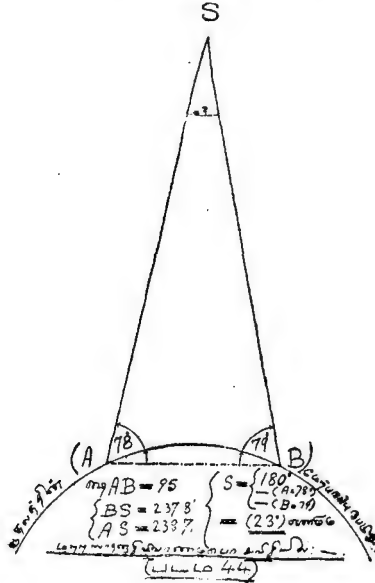
$$\text{இங்கு தெரியவேண்டிய } (AB) = 21.8.,$$

குறிப்பு:—இந்த (B) ஸ்தானத்தில் (CE) ரேகையே இருக்கும் எதிர்கரையாக வைத்துக்கொண்டால் (CB) என்கிற கணிதம்ல்லாமலே சற்று சுலபமாகவும் கணிதம் முடிவுபெறும்.

மற்றும் வந்தன வெல்லாமிப்படிக்கணிக்கு:—

வேறு:—

(படம் 44ஐ நன்கு கவனி):—



இங்கே:—

ரேகைகளையும் கோணங்களையும் ஸரித்த மற்றோர் விசேஷகணிதம்:

சுமாராக:— (B ஸ்தானம்) = பதமுஸ் (A ஸ்தானம்) = டெல்லி என்றும், (S) ஸ்தானம் = ஆகாயத்தில் உயரே உள்ள ஓர்நகரத்திரம் என்றுங்கொண்டால் இப்போ AB தூரம், = 95. (A) கோணம் = 78°; (B) கோணம் = 79°; இவைகளை கொண்டு (S) ஸ்தானத்திய? தெரியவேண்டிய கோணம்; AS அல்லது SB தூரம், இவைகளைக்கணிக்க:—

ஒருமலிதன் பதமு(Bயில்)ஸில் சின்று S என்ற நகரத்திர ஸ்தானத்தை மேலே நோக்க (BS) என்ற ரேகை ஏற்பட இதன் ஸகாயத்தால் $\angle B = 79^\circ$ ம்;

இதே ஸமயத்தில் மற்றொருவன் Aஸ்தான மாகிய, டில்ஹி யிலிருந்து S என்ற அதே நகரத்திரத்தை நோக்க AS என்றேற்பட்ட ரேகை ஸகாயத்தால் ($78^\circ = A$) கோணமும்.

மதராஸ் டில்ஹி தூரமும் நேர் AB ரேகையில் சுமார் ($95''$ அங்குலம்) என்றும், ஏற்பட.

AS, அல்லது BS தூர அங்குலம் என்ன-S ஸ்தான கோணம் (?) என்ன வென்றால்:—

$$\begin{aligned} S &= (180^\circ - A - B) \\ &= (180^\circ - 78^\circ - 79^\circ) \\ &= 23^\circ = S \text{ என்பதை முதலில் கணித்துக் கொண்டு.} \end{aligned}$$

மேத மேடிகல் டேபில் (TABLES) படிக்கு புஜஜ்ஜியா என்கிற(வைன்)

$$\left. \begin{aligned} 23^\circ &= 0.3907. \\ 79^\circ &= 0.9816. \\ 78^\circ &= 0.9781. \end{aligned} \right\} \text{ என்றும் தெரிந்துக் கொள்க}$$

இதற்கு மேல்:—

பொது வழியின்கே:—

(S கோண = 23°) ஜ்யாவுக்கு இதன்ஸம் முகபுஜமான (AB ரேகை = $95''$) அங்குலமானால் (A கோண = 78°) ஜ்யாவுக்கு (BS) என்கிற ரேகையாகும்:

இவ்விதமே B கோண (79°) ஜ்யாவுக்கு AS என்கிற ரேகை என்பது இவை களும் அங்குலத்தில் தான் வரும்:—

இதற்கு உதாரணம்:—

44ம் படப்படிக்குறிய:—

$$\begin{aligned} BS &= \frac{\text{வை A}}{\text{வை S}} (AB) = \frac{\text{ஜ்யா A}}{\text{ஜ்யா S}} (AB) \\ &= \frac{9781}{3907} \times 95'' = \frac{929195}{3907} = 237.8'' \text{ அங்குலம்} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AS &= \frac{\text{வை B}}{\text{வை S}} (AB) = \frac{\text{ஜ்யா B}}{\text{ஜ்யா S}} (AB) \\ &= \frac{9816}{3907} \times 95'' = \frac{932520}{3907} = 238.7'' \text{ அங்குலம்} \end{aligned}$$

$\therefore BS = 237.8$ அங்குலம், $AS = 238.7$ அங்குலம் என்றேற்பட்டது.

AB (ஸ்தானத்திய காட்டுரேகை) அளவுக்குறிய மைல்கள் முயற்சியால் தெரிந்துக்கொண்டு, BS. AS. மைல்களையும் அல்லது இஷ்டஅளவில் நீளங்களோடும் கணித்துக்கொள்ளலாம்.

இங்கு இக்கணித அதிசயத்துக்காக இதன் உருவ விவரணம் மாத்திரமே காட்டப்பட்டது.

விரிவடையும் பயத்தால் இதோடு நிறுத்திக் கொள்ளப்பட்டது.

(வேறு):—

மற்றோர் விசேஷ சேஷத்ரங்களின் கணிதமிங்கு:—

(○ ABCD என் றே வட்டத்தில் $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOA$, என்று நான்கு (திரிபுஜங்கள்) த்ரிகோணங்கள் அமைந்திருக்கின்றன. ஸ்தா (AO, = OB, = OC = OD) இவைகள் எங்கும் ஒரே ஸமபாகவே அறைவிட்ட அளவாகத்தானிருக்கும். நேர்க்கோடுகள் (AB = BC = CD = DA) இவைகள் தான் வில்லோச்சம் பந்தக்கோடு தான்; வித்யாஸம் அடையுமென்பதாம்:—

இந்த வட்டத்துள் நாலு த்ரிகோணங்களமைந்ததாக உருவம் காட்டப்பட்டது ஒரு வட்டத்துள் இரண்டு த்ரிகோணம் முதல் பல த்ரிகோணங்கள் வறையில் படத்தில் காட்டிய வில்லின் ஓர புஜங்கள் மாத்திரம் ஸமவித்தியாஸத்தில் அமையலாம், அமைக்கப்படும்.

இவைகளைக் கணிக்கச் சூத்திரங்களிங்கு:—

சூழிப்பு:— இரு த்ரிகோணமென்பதற்கு:—

படம் 45(-A)

$\angle ABC$, $\angle ADC$ இவ்விண்ணுக்கும் பெரிய புஜம் விட்டமாகிய AC யே யாகுமென்பதுணர்க:—

வில்லைத்தொடும்; காண் உருவமுள்ள AB, போன்ற புஜ நீளங்களைக் கணிக்க:— இப்படி நாணய் நிற்கும் புஜங்கள்:—

படம் 45 (-A)ல் கவனி:—

[ஸமபுஜங்களாகிய இவைகளின் ஸாதனத்துக்கு வேறுவித வழியை இதன்பின் சொல்லப் படுகிறது.] (இங்கு வட்டத்துள்ளமைந்த முக்கோணங்கள் மூன்று முதல் ஒன்பது வரையிலுள்ளவை களான புஜங்கட்குக் கணிக்கும்வழி):—

{ (வேண்டிய புஜம் மூன்றாகில்) (பெருக்கு மெண்ணின்)	{	குணகம்.
		103923.
(செ நான்காகில் செ)	=	84853.
(செ ஐந்தாகில் செ)	=	70534.
(செ ஆறாகில் செ)	=	60000.
(செ ஏழாகில் செ)	=	52055.
(செ எட்டாகில் செ)	=	45922.
(செ ஒன்பதாகில் செ)	=	41031.

• இவ்விதமிங்கு (மேலே) காட்டிய பெருக்கு மெண்ணுகிய குணகத்தால் வட்டவிட்டத்தைப் பெருக்கியதை லக்ஷத்திருபத்தாயிறத்தால் (120000) ஆல் வகுத்த ஈவே மேற்சொல்லப்பட்ட உருவுள்ள புஜநீளம் (வில்லின் நாண் நீளம்) ஆக வரும். இதற்கு 4 புஜம் (படத்தில் காட்டிய ரேகை AB) கணிக்க உதாரணம் பார்க்குது:—

இங்கு வட்டத்தின் விட்டம் AC = 110 ஆகில் AB, BC, CD, DA என்பவைகளின் நீள மென்னவென்றால்:—

(விட்டம் = 110)ஐ (84853)ஆல் பெருக்கியது 9333830 இதை (120000) ஆல் வகுத்த ஈவு $77\frac{9383}{120000}$ அல்லது (78) என்றாகொள்க:—

இங்கு ஒன்பது தாய்சரம் (புஜங்கள்) வரை ஏற்படுமவைகட்டுக்குத்தான் குணகங்கள் ஏழுவிதமாகக் கூறப்பட்டிருக்கிறது. விட்டமான வகுக்குமெண் 120000க்கு.

இதற்கு மேலும்-10; 11; 12; 13; 14. 15. 20: 100; 500: முதலிய இஷ்டப்படி புஜங்கள் (திரிகோண புஜங்கள்) அமையலாம். அமைக்கலாம். ஆகையால் இவைகளின் ஸாகனத்துக்குரிய வகுக்குமெண் (120000)க்கு வட்டத்தின் விட்டத்தைப் பெருக்கு மெண்களாகிய குணகங்களைச் சாதனம் செய்யும் வழி:—

பாகைகள் 180° ஐ (நூற்றெண்பதை) வேண்டிய முக்கோண எண்ணால் வகு. ஈவுக்குரிய பாகைகளின் புஜஜ்பாவை (SIN) (120000)ஆல் பெருக்கு இதே பேற் கூறியபடி குணகமாகிய பெருக்கு மெண்ணாம்:

உதாரணமிங்கு:—

(முன்னுறையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மேத மேடிகல் டேபிள்படிக்கமைந்த ஜ்யாஇங்கு வேண்டும்.)

தீரியசரம் (புஜம்) 9க்கு:—

$$\frac{180^\circ}{94} = 20^\circ \text{க்கு ஜ்யா (ஈஸன்)} = 0.342 \text{ இதை (120000) ஆல் பெருக்}$$

கியது (ஒன்பது புஜகுணகம்) = $(120000 \times 0.342) = 41040$ முன் சொன்ன குணகம் = 41031, இவ்விரண்டின் வித்யாஸம் = 9.

தீரியசரம் 4க்கு உதாரணம்:

$$\frac{180^\circ}{44} = 45^\circ \text{ஈஸன் (ஜ்யா)} = 0.7071 \text{ இதை (120000)ல்}$$

குணிக்க = (0.7071×120000) இதன் = 84852, முன் சொன்னது 84853, வித்யாஸம் = 1.

இவ்விதமே மற்ற குணகஸாதனமும்:

த்ரியசர்ம் (த்ரிபுஜம் = த்ரிகோணம்) 45 ஆனால் அர்போகுணகங் கணிக்க:—

$\left(\frac{180^\circ}{45^\circ}\right) = 4^\circ$ க்கு (செ டேபிலில் பார்க்க) ஜ்யா (ஸைன்) = 0.0698 இதை (120000)ல் பெருக்கிபதுகை = $(.0698 \times 120000) = 8376$. என்பதாகும்.

மற்றும் வருவன வெல்லாமிப் படிப்பார்த்துக் கொள்ள வேண்டியது என்பதை அவசிய முணர்க—

ஸூக்ஷ்மஜ்யர்ஸாதனத்துக்கு முன் ஸூலபஸர்தனத்தின் பெருட்டு:— ஸ்தூலமாய்ஜ்யா (ஸைன்) SIN கணிக்கப் போது வழியிங்கு:—

(இஷ்டசாபம் 1° முதல் 90° வரையில் கொண்டும், அரைவட்டம் (பரிதி) 180° ம்-கொண்டாலப்போது இஷ்டபாகை 45° க்கு (ஸைன்) ஜ்யா கணிக்கவேண்டுமென்றால் (இவ்வேலைகள் தசாம் சவீதத்தில் சுகமாக முடியுமாதலால், அம்முறைப்படி.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{இஷ்டசாப ஜ்யா} \\ = (\text{ஸைன்}) \end{array} \right\} = \left\{ \frac{(4 \text{ விட்டம்}) (\text{பரிதி} - \text{சாபம்}) (\text{சாபம்})}{\frac{5}{4} (\text{பரிதி})^2 - (\text{பரிதி} - \text{சாபம்}) (\text{சாபம்})} \right\}$$

இங்கு பரிதி = 180° , ஆகையால் செக்குச்

$$= \left\{ \frac{(4 \text{ விட்டம்}) (180 - \text{சாபம்}) (\text{சாபம்})}{\left(\frac{5}{4} \times 32400 = 40500\right) - (180 - \text{சாபம்}) (\text{சாபம்})} \right\}$$

இதற்கு உதாஹரணமிங்கு:—

பரிதி = 180° , (இஷ்டசாபம் = இஷ்டபாகை 45°)க்கு ஜ்யா கணிக்கும் உதாஹரணமிங்கு:—

180° ல் 45° ஐக்கழித்த மிச்சம் = 135° , இதை 45° ல் பெருக்க — 6075; இதை 4ல் பெருக்க = 24300. என்று நிரூபித்திட்டு.

பின்பு:—

செ 6075ஐ, 40500ல் கழித்த மிகுதி = 34425. இதற்கு முன்னிருந்திய 24300 ஐக்குடுத்த ஈவு = 0.7059. என்று வந்தது. இந்த இஷ்ட சாபம் 45° பாகைக்கு முன்னுறையிலுள்ள மேத மேடிகல் டேபிலைப் பார்க்க ஸைன் (ஜ்யா) = 0.7071. இவ்விரண்டின் வித்யாஸம் 0.0012.

செ 0.7071ஐக் கணிக்க த்ரிகோணமிதி ஜ்யாஸாதனம் இனி கூறுவதைப் பார்க்கவும்:—

இந்த முன்னுறையில் கண்ட ஸூக்ஷ்மஜ்யா ஸாதனஞ்செய்ய முன்னே சில உபகரணங்கள் வேண்டியது.

$$\left\{ \begin{array}{l} [\text{செ } 45^\circ \text{ல் பாகைக்கு மாத்திரம் ஜ்யாஸாதனஞ் செய்ய வேண்டுமானால்:—}] \\ [\text{ஜ்யா (SIN) } 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{(0.50)} = 0.707107 \text{ என்பது.}] \end{array} \right\}$$

அவைகளின் விவரணமிங்கு:—

சுத்தமான முறைப்படி ஏற்பட்டவைகளாகிய:—

$$\left. \begin{array}{l} \text{உபவிகலை (1''') க்கு} \\ \text{புஜ்யா (SIN)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} [\text{சாபம்} = (\pi \div 180^\circ \times 60^3)] \text{ ரு} \\ = 0.0000000808022802 \dots \dots \dots \\ 0.0000000808022802 \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ஹை ரு கோடிஜ்யா} \\ = (\text{COSIN}) \end{array} \right\} = 0.99999999 \ 9999999 \ 67355 \dots \dots \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{விகலை (1'') க்கு} \\ \text{புஜ்யா (SIN)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{சாபம்} = (\pi \div 180^\circ \times 60^2) \\ = 0.00000 \ 48481368111 \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ஹை ரு கோடிஜ்யா} \\ = (\text{COSIN}) \end{array} \right\} = 0.99999 \ 99999 \ 88247785 \dots \dots \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{கலை (1') க்குறிய} \\ \text{புஜ்யா (SIN)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{சாபம்} = (\pi \div 180^\circ \times 60) \\ = 0.0002908882086657 \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ஹை கோடிஜ்யா} \\ = (\text{COSIN}) \end{array} \right\} = 0.999999957692025328 \dots \dots \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ஓர் பாகை (I°) க் குறியவை} \\ \text{யாகிய (சாபம் = வட்டம்)} \end{array} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{180^\circ} \right\} = \left\{ \frac{3.1415926535897932}{180^\circ} \right\}$$

$$= 0.01745329251994329 \frac{1}{18} = 0.01745329252;$$

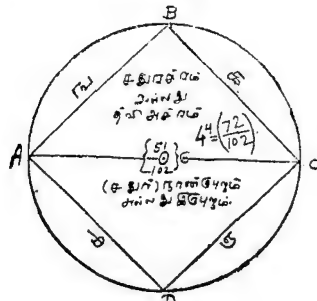
$$(\text{புஜ்யா} = \text{SIN}) = 0.0174524 \dots \dots \dots$$

$$(\text{கோடிஜ்யா} = \text{COSIN}) = 0.9999999 \dots \dots = (-1)$$

$$\pi = 3.1415926535897932$$

$$90^\circ (\text{பர்கை}) \text{ ரு } \left\{ \begin{array}{l} \text{சாபம்} = 1.5707963267948966 \dots \dots \dots \\ \text{புஜ்யா} = 1; \\ \text{கோடிஜ்யா} = 0; \end{array} \right.$$

(வேறு)



(படம் = 45°)

[படம் (-45)] ஐக் கவனி

(புஜம் = 3)

(இ. பு = இஷ்ட புஜங்கள்) \therefore

வட்டஓர ஸம்புஜ நீள = ஜ்யா $\left(\frac{180}{\text{இ. பு.}}\right)$ $([\text{விட்டம்}] = [2 \text{ அரைவிட்டம்}]) \therefore$

இதற்கிஷ்டத்ரிபுஜம் = 3^4

$\therefore (180 \div 3^4) = 60^\circ$;

(ஜ்யா 60°) = 0.866

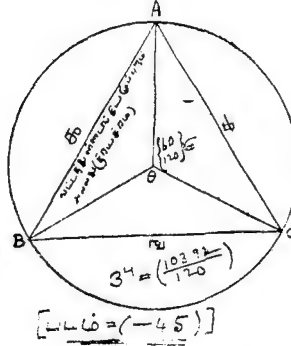
$\therefore (0.866 \times 60 \times 2) = 103.92$

$\therefore க = ங = ச = 103.92 \therefore$

(மேல் வரும் கோணங்கட்கு மிவ்விதமே கணிக்குக) :—

இஷ்ட புஜங்களை (AB = க), (BC = ங), (CA = ச)

அவ் புஜங்கள் 3மும் = (3^4) எனக் கொண்டதாம் :—



(பட்டம் 45)ஐக் கவனி

வட்டத்துள்ள டங்கிய நாலு புஜம் (அல்லது இருபுஜம்)

$$\left\{ \frac{180^\circ}{4^4} \right\} = 45^\circ;$$

(45° ஜ்யா) = 0.7071

புஜம் = (2 அல்லது 4) $(.7071 \times 102)$

= $(72.1242)' = (AB)'$

(இங்கு இஷ்டத்ரிபுஜங்கள் 4.

$\therefore 180$ ஐ 4ல் குறுக்க 45° வந்தது. மற்ற விவரம் மேல் நோக்குக)

(உள்ளோக்கும் பார்வையால் விட்ட அளவில் இருத்ரிபுஜங்களுமுள்ளதைக் கவனிக்குக); (மேல் நோக்கால் நான்காம்)

$$AB = ஈ,$$

$$BC = க,$$

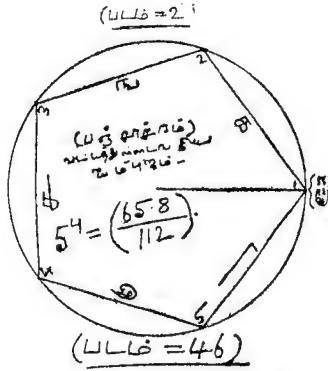
$$CD = கு,$$

$$DA = ச,$$

∴ (க = ஈ = ச = கு) ஆனபடியாலிந்து $72 \cdot 1242 ரு = (க = ஈ = ச = கு)$ என்ற புஜங்கள் ஸமத்வமாயின : —

மற்றும் வருவன வெல்லா வற்றிற்கும் முன் [படம் 45 (-45)] க்குச் சொன்னதையும் இங்கு சொன்னதையும் நன்கு கவனித்துக் கொள்க:—

$$(\text{புஜம் } 5) = 5^4$$



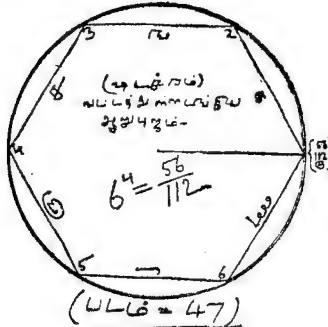
(படம் 46) ஐக் கவனி.

$$\left(\frac{180^\circ}{5^4}\right) = 36^\circ; (36^\circ \text{ ஜயா}) = 0.5878$$

$$(0.5878 \times 112) = (65.8336) = க = ஈ = ச = கு = ட$$

(இங்குள்ள திரிபுஜங்கள் 5 ∴ 180° ஐ 5 ல் வகுக்க 36° வந்தது) மற்ற விவரம் மேல் பார்க்குக.

$$(\text{புஜம் } 6) ரு = 6^4$$



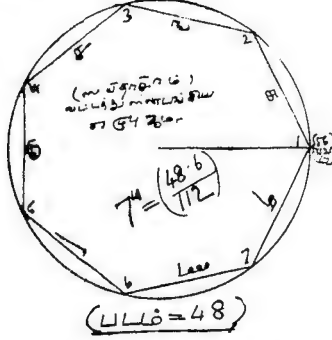
(படம் 47) ஐக் கவனி.

இஷ்டத்ரிபுஜம் 6. $\therefore 180^\circ$ ஐ 6ல் வகுத்த ஈவு 30° மற்ற விமரம் கீழ் கொக்குக)

$$\left(\frac{180^\circ}{64}\right) 6 = 30^\circ; (30^\circ \text{ ஜ்யா}) = (0.5000) (0.5 \times 112)$$

$$= (56.0) = க = ங = ச = ஞ = ட = ண.$$

$$(புஜம் = 7) ரு = 7^4$$



(பட்டம் 48)ஐக் கவனி.

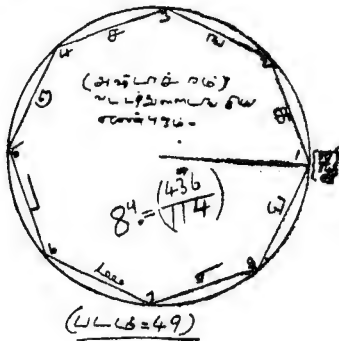
இஷ்டத்ரிபுஜமிதற்கு 7 $\therefore 180^\circ$ ஐ 7ல் வகுத்த ஈவு $(25\frac{5}{7})^\circ = 25^\circ 43'$

$$\therefore \left\{ \frac{180^\circ}{74} \right\} = 25\frac{5}{7}^\circ; (25\frac{5}{7}^\circ = 25^\circ 43') \text{ ஜ்யா} = 0.434 \dots$$

$$(\cdot 434 \times 112) = (48.608)$$

$$\therefore க = ங = ச = ஞ = ட = ண = த = 48.6.$$

$$(புஜம் = 8) ரு = 8^4$$



(பட்டம் 49)ஐக் கவனி.

இதற்இஷ்டத்ரிபுஜம் 8

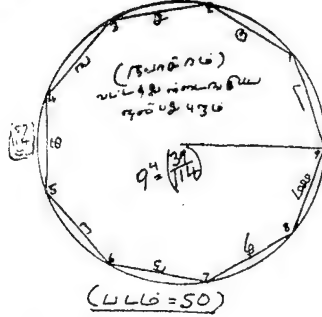
$$\therefore 180^\circ \text{ஐ } 8 \text{ல் வகுத்த ஈவு} = 22\frac{1}{2}^\circ$$

$$\therefore \left(\frac{180^\circ}{84} \right) = 22\frac{1}{2}^\circ; (22\frac{1}{2}^\circ \text{ ஜயா}) = 0.3827$$

$$(.3827 \times 114) = (43.6278)$$

\therefore (க = ன = ச = ஞ = ட = ண = த = ந) :—

$$(\text{புஜம்} = 9) \text{ ரு} = 9^4$$



(படம் 50) ஐக் கவனி-

இவற்கிட்டத் தரி புஜம் = 9

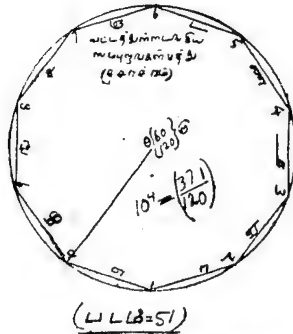
$\therefore 180^\circ$ ஐ 9 ஆல் வகுத்த சவு 20° ,

$$\therefore \left(\frac{180}{94} \right)^\circ = 20^\circ.$$

$$(20^\circ \text{ ஜயா}) = 0.342$$

$$(0.342 \times 114) = 38.988' = \left\{ (க = ன = ச = ஞ = ட = ண = த = ந = ப) \right.$$

$$(\text{புஜம்} = 10) \text{ ரு}$$



(படம் 51) ஐக் கவனி.

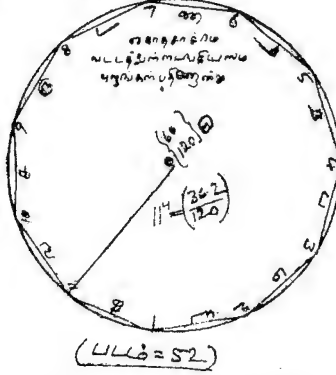
$$\text{இதற்கிட்டத் தரி புஜம்} = (10^4) \therefore \left\{ \frac{180^\circ}{10^4} \right\} = 18^\circ \therefore$$

$$(18^\circ \text{ ஜயா}) = (0.309);$$

$$(.309 \times 60 \times 2) = 37.08$$

$$\therefore க = ன = ச = ஞ = ட = ண = த = ந = ப = ம = 37.08;$$

(இங்கு இஷ்ட புஜம் = 11) $\eta = 11^4$



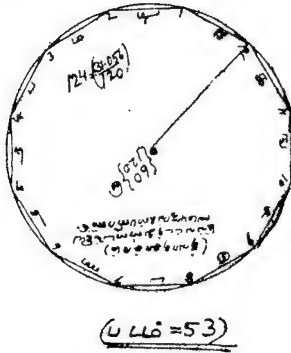
(பட்டம் 52)ஐக் கவனி.

$$\text{இஷ்டத்ரி புஜம்} = 11^4; \therefore \left\{ \frac{180^\circ}{11^4 = 11} \right\} = \left(6 \frac{6}{11} = 16^\circ 32' \frac{8}{11} \right)$$

$$\left\{ \left(\text{ஜயா } 16^\circ 33' \eta \right) = (0.2848) \right\} (60 \times 2)$$

$$= 34.176 \therefore \text{க} = \text{ங} = \text{ச} = \text{ஞ} = \text{ட} = \text{ண} = \text{த} = \text{ந} = \text{ப} = \text{ம} = \text{ய} = 34.176 \text{ ஆகும்.}$$

(புஜம் = 12) = 12^4



(பட்டம் 53)ஐக் கவனி.

இதற்கிஷ்டத்ரி புஜம் = 12^4

$$\therefore \left(\frac{180^\circ}{12^4} \right) = 15^\circ$$

$$\therefore \left\{ \left(\text{ஜயா } 15^\circ = 0.2588 \right) (60 \times 2) \right\} = 31.056$$

∴ புஜங்கள் = க = ங = ச = ஞ = ட = ண = த = ந = ப = ம = ய = ர = 31.056 ;

(மற்றும் வந்தவைகட்கு இவ்விதமேகண்டு கொள்க)

விசேஷக்குறிப்பு:— இவ்வட்டத்தையும் இதைச் சார்ந்துள்ள புஜரேகைகளையும் நன்குந்நு நோக்க ஏற்படுவது :—

வட்டத்தின் சுமார் நுழைவார் பங்கு ($\frac{1}{100}$) பார்வைக்கு வக், மில்லாத நேர் ரேகையாகவே இருக்கும்.

ஆகையால் முதியோர்களும், வட்டத்தின் தொண்ணுத்தாறிலோர் பங்கு (அதாவது $\frac{1}{8}$) கீவலம் நீட்சி (நீண்ட)லால் ரேகையாகவே தெரியும் என்கிறார்கள்:—

இதற்கு மேற்கோள் :—

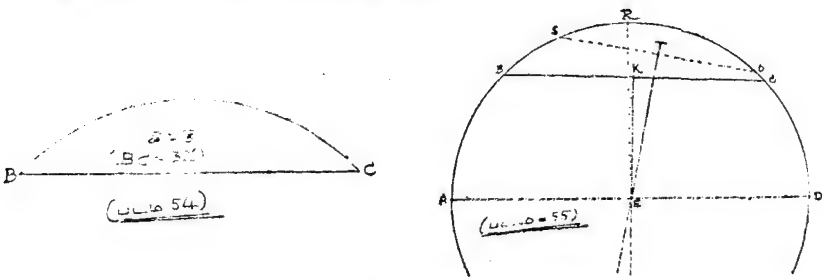
[“வருத்தன்ய ஷண்ணவத்யம் ச: தண்ட வத்ருச்ய தே து ஸ:”]

எனச்சூரியன், பீர்மார, வ்யாஸர், காசிபர் முதலியோர்களின் வாக்யமுமாம்:—

இவ்விதம் வட்ட ஓரபுஜங்கள் எவ்வளவுக் கெவ்வளவு அதிகம் ஆகுமோ அவ்வளவுக் கவ்வளவு வட்டச் சமீபத்திலேயே ஆகும். எண்ணிலா புஜங்களாகில் இவைகள் வட்ட ரேகையிலேயே வித்யாஸமின்றி (வட்ட ரேகையாகவே) உருவம் உள்ளதாகும். ஆகையால் இவ்வித வெகு புஜங்கட்க்கும் வட்டத்துக்கும் வித்யாஸமே இல்லை. (இவ்வனந்த) இவ்வித வெகுபுஜக் காரணங்

களைக்கொண்டே (நீர்கோண மிதி விகிதப்படிக்கும் ($\pi = \frac{\text{வட்டம்}}{\text{வட்டம்}}$) க்குச்சம் என்களின் = ($\pi = 3.1415926535897932 \dots \rightarrow$) என்பது மேற்படுகின்றதைக் கவனிக்குக:—

இங்கு படம் 54, 55 று விவரணம்:—



(படம் 54, 55)ஐக் கவனி.

(BC) என்கிற நாண் நீளம் = 32,

(இங்கு BC என்கிற வில் நீளம் தெரிய வேண்டிய அவசியமில்லை.)

ஐ (BC) வில் நாண்களாக அமைந்த ஓர் ஸமவட்டத்துண்ட கேட்டாரத்தின் விசாலக்குழி (பாப்பளவு) என்ன:—

என்றால் இங்கு BC வில் கேந்திர வட்டத்துண்டப் பரப்பளவு தெரிய வேண்டியது அவசியமாகின்றது.

சுத்தமாக இதைக் கணனம் செய்யும்வழி:—

முதலில் BCயில் நாண் வட்டத்துண்டத்திலிருந்து (O ABSOCDL) என்ற வட்டமும், இதனுல்தான் விட்டமும் (ய்யமு) தயார் செய்துக்கொண்டு பின்பு இவைகளில் இருந்து கேட BC கேந்திர விசாலங்கணிக்கவேண்டியது.

இதற்குவிவரம்:—

இனி சொல்லப் புகுவந்தற்கெல்லாம் படம் 54விலிருந்தும் இதனால் ஏற்பட்ட படம் 55-லிருந்தும் ஏற்படுவதெருவம் எழுத்தடையாளம் இவைகளை எல்லாம் நன்கு கவனிக்குக:—

முதலில் BC என்ற நாண் (நேர்) சேகையைப் பாதிசெய்: அதனால் (K) என்ற BCன்பாதி (KB = KC) என்று வரும் இந்த. (K) என்கிற ஸ்தானத்தில் உள் நோக்கி நேர்ஸம்பமாக (90°ல்) இருக்கும்படி, நீண்ட கோடொன்றிழு.

பின்பு உள்விஷ்டப்படி தெரிந்த அந்த BC வட்டத்துண்டதுள் (SO) என்ற கோடுவரை. இதையும் பாதிசெய்ய (ST=TO) என்ற (SO)யின் பாதி நீளம் வரும். இதிலும் முன்போல் (T) என்ற ஸ்தானத்தில் நேர் ரெங்குத்துக்கோடு (90°ல் ஸம்பமாகும்படி) முன்செங்குத்துச் கோட்டைத்தாண்டிவ்வையிலிழு.

இவ்விதமிருக்கொடுக்கப்பட்டதால் இவ்விருக்கோடுகளும் ஓரிடத்தில் சம்பந்த திசுதேற்கு. இப்படிச்சம்பந்தக்கூட்டத்தற்கே (E) என்ற மையம் (அதாவது BC என்கிற வட்டத்துண்டத்தக்குறைய ஸம்பூர்ண வட்டத்துடைய நடு மையம் = மத்தியம்) அவசியமேற்படும்.

பிறகு (EB = ES = EO = EC) என்றபடி அத்தச்சம்பூர்ண வட்டத்தினுடைய அறைவிட்டம் வரும். பின்பு ஷே (புவிட்ட) வியாஸார்த்தப்படி கைவாரத்தால் (சம்பாஸினால்) O BSOCDLAB என்ற ஸம்பூர்ண வட்டம் வரைக. [இதைச் சுகத்தன் பெருட்டு ஐஷ்டப்படி (AD) வியாஸார்த்தமுள்ள அறை வட்டமாகவுஞ் செய்துகொள்ளலாம்.] ஐங்கு AE=ED. என்பது.

AD = வட்டத்தின்விட்டம், (ED = EA) = அறைவிட்டமுமாகும்.

(பின்பு = AE = EB = ES = EO = EC = ED) இவைகள் யாவும் வியாஸத்த மென்கிற அறைவிட்டத்துக்குச் சமத்வமாகவே ஆவது. படம் 55-ல், ஏற்பட்டபடி கவனிக்குக.—

பிறகு (BCD) என்ற வட்டத்துண்டமாய் வில் நாண் கேந்திரந்தர்க்கதமாகியக்குழியை (பரப்பை = ஐஷ்டவட்டத்தண்டத்தின் விசாலத்தை)க் கணிக்க:—

BC என்ற நாண் AD என்ற விட்டத்தால் வகு. வருமீவேஜ்யா (ஸைன்)- (அறைவிட்டம் 1 என்றபடிக் கேற்பட்ட அளவில்), இதனால் ஜ்யாதி (ஸைன் முதலிய) பதகப்படி (TABLES) ஜ்யா சாரம் அல்லது கோணம் தெரிந்து கொள்க. இப்படி வந்தஜ்யா கோணத்தின் பாகாதியால் 180° பாகையை வகு. இவ்விவே BC என்றவில் நாண் போன்ற த்ரிபுஜ (த்ரிகோண) கேந்திரங்கள் பூர்ண வட்டத்துள்ளடங்கியது அத்தனை; என்பதைக் காட்டும். இதையே (பெருக்குமெண் என்கிற) குணகம் எனக்கொள்.

அறைவிட்டவர்க்கத்தில் (BC)யின் பாதி (KC)யின் வர்க்கத்தைக்கழித்து $\frac{1}{2}$ முலையின் மீதுமே EKயின் நீளமாகும்.

BCன் பாதியால், அதை EKஐப் பேருக்கியதை மறுபடி குணகத்தாலும் பெருக்கு இதற்கோ கழியும் விசாலமென்ப பெயர். பின்பு முன் கூறியபடி இதற்கெற்படும் (πR^2 ஆகிய) இஷ்டப்படி வட்ட விசாலத்தில் அதை கழியும் விசாலத்தைக்கழி மிச்சத்தை அதை குணகத்தினால் வரு. சிலே. இஷ்ட மாய்த் தெரியவேண்டிய BC என்ற வில் எண் வட்டத்துண்ட கேடித் தூர்த்தக்கத மாகிய பரப்பினளவு; அல்லது விசாலக்குழியாம்.

இதன் ஸ்மீகாணம்: - உதாரணமும்:—

(BC) கேடித் தூர்த்தக்கத கணிக்கச் சமீகாணம்:—

= (அதாவது பொதுஸ உத்திரம்).

BC, SO என்கிற இரு கோடுகளின் பாதியால் (K, T) ஸ்தானத்தில் நேர்ஸம்பமாகச் செங்குத்துக்கொடுகள் (KE, TE) அதாவது ($\angle CKE$, $\angle OTE$) படத்திற் காட்டியபடிக்கும் மேலே பொதுவழியில் கூறிய படிக்கும் நன்கு கவனித்து E மய்ய கேந்திரம் (ஸென்ட்ரல்) ஏற்படுத்திக்கொள்.

பின்பு:—

(EK)ஐ, அளத்துக் கொண்டாலும் சீள மேற்படும். அல்லது

$$(EK) = \sqrt{(ED^2 - KC^2)} = \sqrt{(ED + KC)(ED - KC)}.$$

$BC \times \frac{1}{2} = BK = KC$; $SO \times \frac{1}{2} = ST = TO$; $\frac{1}{2}AD = AE = ED$ என்பவையானே முன் பொதுவழியிலேயே கூறப்பட்டிருக்கின்றது.

$$\therefore AE = ED = EC = EO = ES = EB = EA.$$

$$\therefore EK = \sqrt{(EC^2 - KC^2)} = \sqrt{(EB^2 - BK^2)}$$

$$(\text{ஸைன்}) \text{ ஜ்யா } \angle KEC = \frac{KC}{EC} = \frac{BK}{EB} = \frac{BC}{AD}.$$

அல்லது.

$$[\text{டான்ஜன்ட்} = \text{ஸ்பர்சரேகா } (\angle KEC)] = \frac{KC}{KE} \text{ என்றமாதும்.}$$

முக்கியக்குறிப்பு:—

$$\angle KEC = \angle E = E^\circ \text{ என்பதையுணர்க } \therefore$$

$$C = \text{குணகம்} = \left\{ \frac{(180)^\circ}{(E)^\circ} \right\}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\text{சுழியும் விசாலக்குழி}) \\ = (\text{க. வி. குழி}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} = \frac{C \times \frac{1}{2} BC \times KE}{\text{குணகம்} \times BC \times KE} \\ = \left(- \text{க. கு.} \right) \end{array} \right\}.$$

பின்பு:—

$$\left\{ \begin{array}{l} (\triangle BC) \text{ எண்ணில் சேஷத்ர } \\ \text{(விசாலக்குழி) பரப்பு,} \end{array} \right\} = \left\{ \frac{\pi (EC)^2 - (க'கு)}{கு = குணகம்} \right\} \text{ என்பதாம்.}$$

இதற்கு உதாஹாண மிங்கு:—

($\triangle BC$) க் குறிய குழியைக் கணிக்க:—

BC = 32, இதன் பாதி KC = BK = 16,

SO = 24, இதன் பாதி OT = TS = 12,

பின்பு பொதுவிதி ஸ ஓத்ர விதிகளின் படிச் செய்து ஏற்பட்ட:—

($\triangle BC$) கில் நான் வட்டத்துண்ட கேஷத்ரஸம்பூர்ண (\odot ABSOCDL A) வட்டத் தின் விட்டமாகிய வியாசம் = AD = 44,

இதன்பாதி AE = ED = ($\frac{1}{2} \times 44$) = 22:—

என்ற உபகரணங்களை முதலில் தெரிந்தகொண்ட பின்பு:—

(SIN) ஜ்யா $\angle E^\circ = \frac{22}{44} = \frac{1}{2} = (8 \times \frac{1}{16}) = 0.7273$.

இதற்குரிய கோணம் ஜ்யாபதகப்படி $E^\circ = 46^\circ 40' = (46\frac{2}{3})^\circ$

$$\begin{aligned} \text{அல்லது } KE &= \left\{ (22^2 - 16^2) \right\}^{\frac{1}{2}} = (484 - 256)^{\frac{1}{2}} = (228)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ (22+16)(22-16) = (38 \times 6) = (228) \right\}^{\frac{1}{2}} = 15.1 \end{aligned}$$

[செ $\sqrt{(228)}$ ன் மூலம் = 15.1] என்பதாம்.

(டான்) ஸபர்சரேகா $E^\circ = \left(\frac{16}{15.1} \right) = \frac{16}{15.1} = 1.06$ ரு

ஸபர்சரேகா படம் பார்க்க ஏற்பட்ட தான $E^\circ = 46^\circ 40' = (46\frac{2}{3})^\circ$ என்றுமாகும்.

இந்த $\angle E^\circ$ ஸாதனம் இஷ்டம் போல் செய்யலாம்.—

பின்பு:—

$$\left\{ \frac{180}{E} = 46\frac{2}{3} \right\}^\circ = \left(\frac{180 \times 60}{46 \times 60 + 40} \right) = \left(\frac{10800}{2800} \right) = \frac{108}{28} = 3.8571$$

= 3.8571 = கு. குணகம் = 3.8581 அல்லது 3.8571:—

$$\frac{BC}{2} \times (KC = KB) = \left(\frac{BC \times KE}{2} \right) = \frac{1}{2} BC \times KE$$

= (16 \times 15.1) = 241.6 ஐ செ 3.5871 லும் பெருக்கிய

= (241.6 \times 3.5871) = (க'கு) = (931.8512)

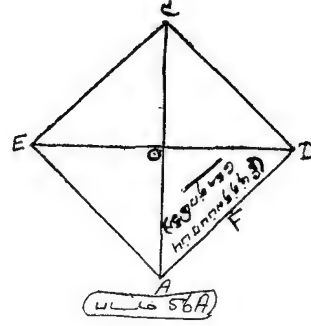
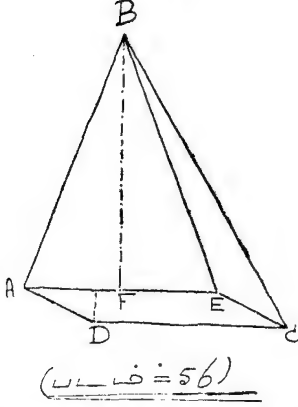
= சுழியும் விசாலக்குழி = க'கி'கு = (க'கு)

முன்சொன்னபடி அறைகிட்டம் 22க்குக்குழி (பரப்பு) = $\pi R^2 = 3.1416 \times 22 \times 22 = 1520.5344$.

(1520·5344 - 931·8512) = 588·6832. இஃத
இஷ்டமாகிய ($\triangle BC$) வட்டத்துண்ட கேஷ்தாவிசாலஞ்சுழியாம்.
($\triangle BC$) கு = 588·6832 = 589. என்பதுணர்க:—

(ஃவறு) :—

(படம் 56, 56-A)ஐக் கவனி



படம் (56), (56A).க்களின் விவரணம்:—

56ம்படம் சதுரக்கூர் கேஷ்தாம். இதனடிப்பாகம் சமச்சதுரம் [படம் 56ல் கண்ட ($\square AECD$)]ஐ; படம் 56 Aல் ($\square AECD$) என்னும் சதுரமாகவே நினைம் துனியில் புள்ளி உருவமுமாம். ஆகவே இன்னுனிப்புள்ளியும் ஓர் மூலையேதான். இவ்விதச் சதுர கேஷ்தாமுலை (அத்துக்கள்) ப்புள்ளிகள் ஐந்து (5) ஆகும்.

இவ்வித கேஷ்தா உருவங்களில்:—

$$AD = DC = CE = EA = 6; FB = 8; \therefore AF = FE = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\therefore AB = DB = CB = EB = \left\{ (FE)^2 + (FB)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (8^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (73)^{\frac{1}{2}} = 8.544.$$

$$\text{நாலு மேல்தலப்பரப்பு} = 4 \left(\frac{AE \times FB}{2} \right) = 2 AE \times FB$$

$$= (\text{மே.ப}) = 2 \times 6 \times 8 = 96 \dots \dots \dots (1)$$

செ நாலு மேல்தலப்பரப்போடு பூமியில் கவிழ்த்து படித்திருக்கும் அடிப்பரப்பும் சேர்தால் மொத்தம் (இந்த கேஷ்தாத்துக்கு மாத்திரம்) ஐந்தலப்பரப்பாம்.

கணிதத்தால்

இந்த ஐந்தலப்பரப்பு

$$= \left\{ 4 \left(\frac{AE \times FB}{2} \right) \right\}$$

$$+ \left\{ AE \times AD = AE^2 = EC^2 = CD^2 = DA^2 \right\}$$

+ { (கி. ப)

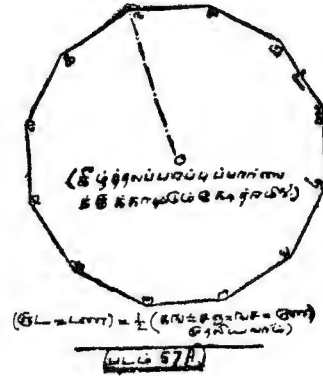
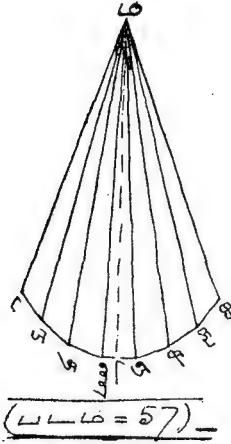
செரு = (மே. ப + கீ. ப). = $(6^2 + 96) = 36 + 96 = 132$.—(2).

குறிப்பு = படம் 56 A-க்கண்ட மத்தியமமான \odot இது (AECD) ன் கர்ப்பஸ்தானம். இந்த \odot ல் இருந்து (படம் 56ல்) கண்ட உச்சிப்புள்ளி Bக்குச் செல்லும் செங்குத்துக்கோடு கற்பச் செங்குத்துக்கோடு (இதற்கு = $\odot B$), மற்ற-FB-பக்க மத்திச் செங்குத்துக்கோடு என்பதுணர்:—

இது ஸமச்சதுரம் ஆகையால்:—

(1). கோடித்திரகனபரிமாணம் = $\frac{1}{3}$ (செங்குத்துக்கோடு \times அகலம் \times நீளம்). என்பது.....(3)

கோடித்திரகனபரிமாணம் = $(AB^2 - A \odot B)^{\frac{1}{2}}$ என்பதாம்:—
(படம் 57, 57-A) ஐக் கவனி.



படங்கள் (57), (57A) க்களின் விவரணமிங்கே:—

இது “இஷ்ட புஜக்கூர்” கோத்தரம்.

இதன் மேல் தலங்களின் பரப்பு = (இ.பு.மே.த.ப) படம் (57.ஐப் போலவும்).

அடித்தலப்பரப்பு = (இ.பு. அ. த. ப.) படம் (57A) ஐப் போலவும் (ஆக இரண்டு தலம்மரப்பும் ஒன்றாகச் சேர்ந்து) இருக்கும். [இந்தவித இஷ்டபுஜ கோத்தரத்துக்குரிய அடித்தலப்பரப் பின்உருவம் பற்றி படங்கள் (—45 முதல் 53 வரைக்குமுள்ள) முப்புஜாதி பணிணி புஜங்கள் வரையில் உள்ள வட்டத்துள் எடங்கிய இஷ்டபுஜ கோத்தர ரூபங்களைப் பார்க்க விவரம் நன்கு விளங்கும்] இதற்கும் துனியில் (ம) என்கிற ஸ்தானத்தில் புள்ளி உருவ மானமுதல் தான். ஆகவே இவ்வித இஷ்டபுஜ கோத்தரக்கட்கெல்லாம் ஏற்படும்மூலைகள் (1 + இஷ்ட புஜ ஸத்திமூலைகள், ஆகிய பிந்துக்களாம்.

(இப்புஜனாந்தி மூலைகளும் இதற்குரிய கர்ப்ப கோத்திரத்திலிருந்தேற்படும் வட்டத்தின் கோகை மேலேயேதான் இருக்கும்.)

படம் (57, 57A) —ல் இஷ்டபுஜங்கள் (12) என்பதாகும்.

இதைவிட இஷ்டபுஜங்கள் 3 முதல் நம்மிஷ்டப் படிக்கேற்கும் செ 12க்குப் பதிலாக (வட்டமூ) புஜங்களின் எண்கள் உள்ளனவாக அமைக்கலாம், அவசியம் இவ்வித உருவங்களுமேற்படக்கூடும்,

கவனிக்கவேண்டிய சில குறிப்புகள்:—

இஷ்ட புஜ எண்களின் = (இ. பு. எ) (1).

(கங = ஸச = சஞ = ஞண) முதலிய (சரி) சமான இஷ்டபுஜ நீள ரேகைகளின் = (இ. பு. நீ) (2).

(மங = மங = மச = மஞ = மண) முதலிய புஜஸந்தி (புஜ ஆதி அல்லது புஜக்கோடி) யிலிருந்து உச்சிப்புள்ளி (ட)வுக்குச் சாய்ந்திருக்கும் நீளம் (சா. நீ) (3).

மேல் தலப்பரப்பில் இஷ்ட புஜப் பாதியிலிருந்து உச்சிப்புள்ளிக்குச் சாய்ந்த நீளக்கோடு = (மட) = (மே. த. செ. நீ) = மேல்தலச் செங்குத்துக் கோடு நீளம் (3A).

இஷ்ட புஜ நீளப்பாதியின் = $\frac{1}{2}$ (இ. பு. நீ) (4).

இஷ்டபுஜப் பாதியிலிருந்து உச்சிப்புள்ளிக்குச் செல்லும் மேல் தலப்பரப்பில் ஏற்படிக் கோடு நீளம் = (இ. பு. ம. செ. நீ) (5).

(ஷெ நெம்பர் 3Aம் 5ம்) ஒன்றையே குறிப்பது நன்கு ஏற்படுவதற்காக:—

0ங = 0க = 0ச = 0ண) முதலிய நீளப்பக்க புஜம் சமானமே.

(கங = ஸச = சஞ = ஞண) முதலியளவும் சமானமே = (இ. பு)

(ஞட = டண) = $\left(\frac{1}{2}\right)$ இ. பு. (6).

என்றாமிதற்கு = $\frac{1}{2}$ (ணத = தந = கங = ஸச = சஞ = யர = ரல = லக) முதலியவுமுணர்க.

குறிப்புகள் சில கவனிக்க வேண்டியவைகள்:—

இஷ்டபுஜ எண்களின் = (இ. பு. எ); (கங = ஸச = சஞ = ஞண = ணத = தந) முதலிய (சரி) சமான புஜங்களின் நீளம் = (இ. பு. நீ);

[சேஷதாக்குழி கனம் முதலிய ஸா(நு)தன விவரணம்].—

இஷ்ட புஜ உச்சிப்புள்ளி உருவ சேஷதாத்துக்குறிய:—

[மேல் (சாய்வு) தலப் பரப்பின்]

$$= \frac{1}{2} \left[(சா.நீ)^2 - \left(\frac{இ. பு. நீ}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times [(இ. பு. நீ) (இ. பு. எ)] = (ம. சா. த. ப) \quad (1)$$

[இதன் பூமித் தலப் பரப்பின்]

$$= \frac{1}{2} \left\{ (0ங)^2 - \left(\frac{இ. பு. நீ}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times \{ இ. பு. எ. \} = (இ. பு. த. ப) \quad (2).$$

[இதன் மொத்தத் தலப் பரப்பின்] = [மே. சா. த. ப) + (இ. பூ. த. ப)]... (3).

படம் 57Aல் கண்ட கீழ் தலப்பரப்பின் மத்தியில் உள்ள பிந்து ரூசக எழுத்து (O) ஸ்தானம் இஷ்ட பு., உச்சிப்புள்ளி உருவக்ஷேத்ர கர்ப்ப (மத்ய) கேந்திர பிந்து (புள்ளி) ஆகும்.

(இந்த கர்ப்ப கேந்திரப் புள்ளியில் இருந்து உச்சிப் புள்ளிக்குச் செல்லும் செங்குத் துயரக் கோடு நீளம்).

$$= (O ம) = (கர்ப்ப உச்சிக் கோடு) = (க'உ)$$

$$= \left\{ (சா.நீ)^2 - (O ம)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (O ம) \quad (4).$$

$$(O ம = O ல = O க முதலியனின்) = \left\{ (சா.நீ)^2 - (O ம)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5).$$

$$(இதன் கன பரிமாணம்) = \frac{1}{3} \left\{ (இ. பூ. த. ப) (O ம) \right\}. \quad (6).$$

என்பதாம்:—

(இதா விதத்தில் ஏற்படும் சகல சந்தேக நிவாரணத்துக்கும் படம் 57, 57Aஐ நன்கு கவனிக்குக).—

மற்றும் இவ்விதம் வருவானவெல்லாம் இந்தப் படங்குச் சாதனஞ் செய்துக் கொள்ள வேண்டியதாம்.

விசேஷக் குறிப்புகள்:—

(இ. ப. எ) எவ்வளவுக் கெவ்வளவு அங்கிரிக்கின்றதோ அவ்வளவுக்கவ்வளவு (இ. ப. நீ) மிச்சமிக்கக் குறைந்து வக்காசா ரேகையாகக் கடைசியில் இது உட்ப ரேகையாக (வட்டபாகவே) பாறும்:— (என்கிற விவரத்தை நன்கு தெரிந்துகொள்ள வேண்டியதற்காகப் படங்கள் — 45 முதல் 53 வரையிலுள்ள) முட்புஜாதிப்பன்னி ரண்டு புஜங்கள் பரியந்தமுள்ள உட்டத்தைத்தொடும் இஷ்டபுஜாந்தம் அல்லது இஷ்ட புஜாதிபுடயக்ஷேத்ரங்களை நன்கு கவனிக்குக:—)

இவ்விதம் கீழ்த்தலப் பரப்பு மாறுபாடடைவதால் ஸமக்ஷேத்ரவட்டங்களும், மேல்தல ஓரப்பரப்பு மாறுபடுவதால் சுறுரூபக்ஷேத்ரங்களும், ஏற்படுகின்றன:—

[இவ்விதக்ஷேத்ரங்களை (சமக்ஷேத்ர வட்டத்துக்கு) படம் 1-3-4ம், (சுறுரூபக்ஷேத்ரத்துக்கு) படம் 5ஐயும் பார்க்க நன்கு விளங்கும்]

மேலும் இதைவிட பக்கம் (114ல்) சொன்னபடி இஷ்டபுஜம் 45க்குச் சொன்ன குணகத்தால் வட்டத்துள்ளேற்படும் 45 புஜத்தையும்க்ஷேத்ரம் செய்து பார்த்தால் இதன் வாஸ்தவம் இன்னும் நன்கு விளங்கும்:—

அமித (வெகு அதிகரித்த) தரி புஜஸந்திப்பால் வட்டமும் இந்த புஜங்களும் வித்யாவமே இன்றியிருப்பதும் புலப்படும்:—

இவ்வித கேந்தாக் கீழ்சலப்பாப்பு கணிக்கும் உதாஹாணத்தை படம் 55ன் (க. கு. = கழியும் விசாலக்குழி) என்பதைக்கணிக்கும் விவரணத்தில் பார்க்கவும்— மற்றமேல், தலப்பாப்பு கணிகும் உதாஹாணம் படம் 56ன் விவரணத்தில் பார்க்கவும்.—

அதுபோல இதைச் செய்ய வேண்டும் என்பதே யொழிய புஜாதி கேந்தாக் கணிதம் வெகு வித்யாஸம் என்பதையும் மனதில் நிருத்தி கணித வேலை செய்ய விடை சரிவரும்.—

மற்றுமேற்படுவதற்கெல்லாம்வீதமே கண்டு உள்ள வேண்டியதாகும்: என்பதாம்:—

(வேறு)

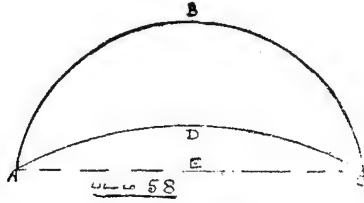
படம் 58, 59, 60 இவைகளின் விளக்கப் பொது விதியிங்கு:—

இவைகளின் ஸாதனத்துக்கு முதன் முதலில் படம் 54, 55ஐயும் இவற்றின் ஸாதகப் பொதுவிதி முதலிய உதாஹாணம் உருவமிவைகளையும் நன்குகவனிக்க:—

இவ்வுரு முதலிய ஸாதகங்களும் ஏற்படும்.

பின்பு:—

இங்கு

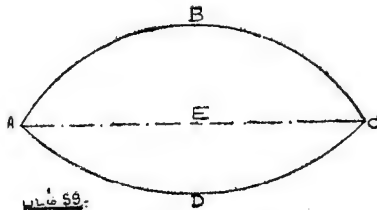


(படம் 58)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ABC} \text{ என்கிற} \\ \text{கேந்தா வட்டத்துண்டக்குழி} \end{array} \right\} = \left\{ \text{ப(ABCE குழி)} - \text{ப(ADCE குழி)} \right\} \quad (1).$$

இச்சமீகாணம் படம் 58ஐ ஆகும்.—

இங்கு:—



(படம் 59)

{ (⊖ ABCD என்கிற கேஷத்! }
வட்டத்துண்டக் குழிறு)

$$= \{ (\ominus ABCE \text{ குழி}) + (\ominus ADCE \text{ குழி}) \} \dots\dots 2.$$

இச்சமீகாணம் படம் 59 ஐ ஆகும்.—

எப்போ இப்படத்தில் கண்ட $AE = EC$, $DE = EB$ என்றாகுமோற்சபயமெல்லாம்.

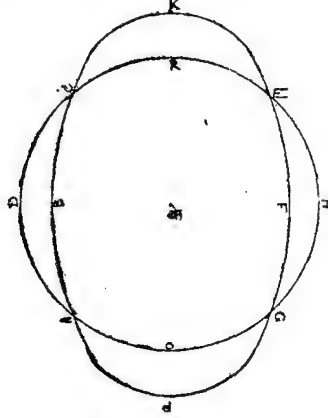
(⊖ ABCD குழிறு).

$$= (\ominus ABCE \text{ குழி}) \times 2 = (2 \times \ominus ADCE) \text{ என்றுமாம்.}$$

மற்றும்வருவன இவ்விதமே.—

இப்போதுஇங்கு:—

படம் 60 ஐ முதலில் நன்றாகக் கவனிக்க வேண்டும் பின்பு:—



(படம் 60)

⊖ ADCREHGO என்கிறது ஸமவட்டமும்,

⊖ ABCKEFGP என்கிறது நீள் (நீண்ட) வட்டமுமாகும்.

இவ்விரு வட்டத்தையும் ஒன்றாய் பதிப்பித்திருக்கின்றதாகப் பாவிக்குக:—

அப்போ.—

படம் (58) றுச் சொன்ன விசாலக் குழி கணிதப்படி இங்கும் கணிக்கப் பட்ட:—
(வெளி வட்டத் துண்ட கேஷத்தாக் குழிகளின் கேர்ச்சை.)

$$= (\text{குழி } ABCD + \text{குழி } CREK + \text{குழி } EFGH + \text{குழி } GOAP).$$

என்பதாகும்,—

(மேலுமிவைகட்டுப்பட்ட ⊖ ABCREFGOA கேஷத்தாக் குழிறு)

$$= (\text{நீள்வட்டக்குழி} - GOAP \text{ குழி} - CREK \text{ குழி}).$$

$$(\text{கே.ருச் சமம்}) = (\text{ஸமவட்டக் குழி} - ABCD \text{ குழி} - EFGH \text{ குழி});$$

..... (3).

என்றுமாகும்.—

∴ (⊙ ADCKEHGPA' குழி) (முழி)

= (ஸமவட்டக்குழி + GOAP குழி + CREK குழி)

= { (நீள்வட்டக் குழி) + (ABCD குழி) + (EFGH குழி) } ... (4).

என்றுமாகும்

மேலுமிதல்:— ஆவது.

(நே. நேர்நேகைகளில்):— CG = AE, B கே = கே F, O கே = R கே. FH = DB, OP = RK என்பவைகளினுடைய கோஸமத்வங்கள் கவனிக்கத்தக்கது இவ்வித சேஷத்ராங்களில் செ ஸ்தான பேகைகள் செ காட்டிய ஸமத்வத்துக்கு வெகுவாக வித்யாஸத்திலு மேற்படலாம். அப்போதும் அவ்வித சேஷத்ரவிசாலங்கணிக்க மேலே குறிப்பிடப்பட்ட ஸீகாண வழியே உயரோகமாகும் என்பதின் பொருட்டே அச்சமீகாணங்களையும் இவ்விதமே எழுதப் பட்டது என்பது உணர்ச்சு.—

இனி வேறு விசேஷ விஷயங்கள்:—

அதாவது 115^{ம்} பக்கத் துடர்ச்சியாகிய கோலாணித ஸம்பந்த மானவைகள்:—

முதலில் இஷ்டபாகைக்கோ, இஷ்டகலைக்கோ, இஷ்டவிகலைக்கோ, இஷ்ட உபவிகலைக்கோ (இ) என்கிற இஷ்டசாபங்கணிக்கவேண்டும். இவ்விஷ்டசாபத்தினால் தான் (SIN) ஸைன் (புஜ்ய்யா) கோடிஜ்யா (S)SIN) கோஸைன் முதலியவைகள் கணிக்க முடியும். இவைகளைக்கொண்டே ஸ்பிரிட். ஸைன் (டான், டீஜன்ட்ஸ் = TANGENTS), கோடான் டீஜன்ட்ஸ் = COTANGENTS) (ஸ்பாக = SECANT), முதலியவுங்கணிக்கவேண்டுமா லகபால்:—

(முதலில் அறிய வேண்டிய விஷயங்களாவன):—

கோலம் (வட்டம்) 1க்கு:—

ரூசி = 12

ரூசி 1க்கு.பாகம் = 30°	பாகம் (பாகைகள்) = 360°
பாகம் 1க்கு, கலை = 60'	கலை கலைகள் = 21600.'
கலை 1க்கு, விகலை = 60''	விகலைகள் = 1296000.''
விகலை 1க்கு, உபவிகலை = 60'''	உபவிகலைகள் = 77760000'''

கோலத்துக்குரிய வியாஸம் = 1 அரைவியாஸம் = 2; (இங்குவ்யாஸத்தைத் தான் விட்டம் என்னப்படுகின்றது.)

தரிகோணமிதிவிதிகளுக்காகிய மேசமேடி கல் டோபில்கள் (0° TO 90°,) அல்லது (-0° TO -5400' அல்லது) (-0° TO -721000''); (இவ்வேயேல் (-0° TO -19440000-')) இவ்வளவுவற்றையிலு ஸாதனம் செய்யப் பட்டால்போதும். 360°-, 21600', 1296000'', 77760000'''- இவைகளால் கையெட்டம் பூராவும் ஸாதனம் செய்யவேண்டியதில்லை.

ஆகையால்:—

இவைகளின் ஸாதனத்துக்குக் குணகனவேண்டும்:— ஆனபடியால் இக் குணகஸாதனம்:—

இஷ்டமாகிய பாகை கலை விகலை உபவிகலைகளை இஷ்டஎண்களாகப்பாவித்தால் முறையே இவைகளின் ஹாரகங்களும் $180^{\circ} - 10800' - 648000'' - 38880000'''$ — என்பவைகளாம்—

ஆகையால் பாதிஉபவிகலைகளுக்கும் இஷ்டசாபமாகிய (இ''') கணிக்கவேண்டினானால் (இஷ்டசாப உபவிகலைகலை இங்கு $0'' - 1'' - 2'' - 3'' - 4'' - 5'' - 6'' - 7''$ TO $19440000'''$ எனில் இவைகளுக்குச் சமம் இஷ்டஉபவிகலைகள் (இ) என்று கொண்டால்) இப்போ:—

$$(\text{ஷெ.இ''''}) = (3.1415926535897932) \times \left\{ \frac{\text{இஷ்டஉபவிகலைகள்}}{(38880000''')} \right\} = (I.T.O.19440000''')$$

என்பதாகும்:—

—(1)

இஷ்ட சாபவிகலைகளுக்கு ஜ்யாதி ஸாதனங்கள் வேண்டின் இவைகட்டுக்குச் சமம் $= 0'' - 1'' - 2'' - 3'' - 4'' - 5'' - 6'' - 7'' - 8'' - 9'' - 10''$ to $324000''$ ஆனால் இவைகளுக்குச் சமம் இஷ்டவிகலைகள் (இ) எனக் கொண்டால் இப்போது கணிக்க வேண்டிய.

$$(\text{இ''''}) = (3.1415926535897932) \left\{ \frac{\text{(இஷ்டவிகலைகள்)}}{(648000'')} \right\} = (I-T 0-324000'')$$

என்பது.—

—(2)

இஷ்ட சாபவிகலைகளுக்கு ஷெ (இ) வேண்டியவை களாகில்:

$0' - 1' - 2' - 3' - 4' - 5' - 6' - 7' - 8' - 9' - 10'$ to $5400'$ இவைகளை இஷ்ட கலைகளாகக் கொண்டால் தற்சமப மெல்லாம்கணிக்க வேண்டிய வைகளாகிய

$$(\text{இ'.}) = (3.1415926535897932) \left\{ \frac{\text{(இஷ்டகலைகள்)}}{(10800')} \right\} = (I-TO-5400')$$

என்பது

—(3)

இஷ்டபாகைகளுக்கோஷெ (இ) வேண்டியதாகில்:— இங்குஷ்டபாகைகளின் $= 0^{\circ} - 1^{\circ} - 2^{\circ} - 3^{\circ} - 4^{\circ} - 5^{\circ} - 6^{\circ} - 7^{\circ} - 8^{\circ} - 9^{\circ} - 10^{\circ} - 11^{\circ}$ — to 90° .;

$$\therefore (\text{இ}^\circ\text{-ரூ}) = (3.14159265359) \left\{ \frac{(\text{இஷ்டபாகைகள்})}{(180^\circ)} \right\} = (1^\circ\text{-TO} - 90^\circ)$$

என்பது

—(4)

இவ்விதம் இந்த (இ)கணித்தறிந்தபின்பு:—

$$(1), (\text{புஜஜ்யா}) = \text{இ} - \frac{\text{இ}^3}{\angle 3} + \frac{\text{இ}^5}{\angle 5} - \frac{\text{இ}^7}{\angle 7} + \frac{\text{இ}^9}{\angle 9} - \frac{\text{இ}^{11}}{\angle 11} + \frac{\text{இ}^{13}}{\angle 13} - + - + \rightarrow.$$

$$(2), (\text{கோடிஜ்யா}) = 1 - \frac{\text{இ}^2}{\angle 2} + \frac{\text{இ}^4}{\angle 4} - \frac{\text{இ}^6}{\angle 6} + \frac{\text{இ}^8}{\angle 8} - \frac{\text{இ}^{10}}{\angle 10} + \frac{\text{இ}^{12}}{\angle 12} - + - + \rightarrow$$

$$\text{குறிப்பு:— } \text{செ} \therefore \angle 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120. \}$$

$$\text{செ} \therefore \angle 6 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720. \}$$

(மேன் மேலும் இவ்விதமே):—

என்பதாயுணர்க.—

(- + →.) முதலியவிகிதங்கள் 15, 17, 19, 21, 23, (14, 16, 18, 20, 22, 24,) இன்னும் மேன்மேலும் (இ) இதேகதியில் முடிவின்மீ அறிதமாய்க்கணிக்க வேண்டியதை நகுறிக்கும். நமக்கு வேண்டியவற்றையில் கணித்துக்கொள்க:—

இவ்விதம் ஜ்யா கோஜ்யாச்சுள் இஷ்டரூபிபாக கலா விகலா பவிகலாதிகட்குத் தெரிந்தபின்பு:—

(இங்கு அரைவிட்டம்) = (திரீஜ்யா = 1) = ஒன்று, எனக் கொண்டிருப்பதனால்.

$$\text{ஸ்பரிசரேகை} = \frac{\text{புஜஜ்யா}}{\text{கோடிஜ்யா}}; \quad (3)$$

$$\text{கோடிஸ்பரிசரேகைக்குச்} = \frac{\text{கோடிஜ்யா}}{\text{புஜஜ்யா}}; \quad (4)$$

$$\text{ஸ்பரிசகர்ணம்} = \frac{1}{\text{கோடிஜ்யா}}; \quad (5)$$

$$\text{கோடிஸ்பரிசகர்ணம்} = \frac{1}{\text{புஜஜ்யா}}; \quad (6)$$

$$\text{வ்யுத்தக்ரமஜ்யா} = (1 - \text{கோடிஜ்யா}),$$

• 90° பாகைக்கு மேல் 180° பாகை வரையில்:—

$$\text{வ்யுத்தக்ரமஜ்யா} = [(1) + \text{ஜ்யா (புஜசாபம் - 90°)}] \quad (7)$$

$$\text{கோடிவ்யுத்தக்ரமஜ்யா} = (1 - \text{புஜஜ்யா}); \quad (8)$$

$$\text{ஜ்யோஜ்யாகர்ணம்} = \text{கார்டு} = (\text{CHORDS}) = \sqrt{(1 + \text{வ்யுஜ்யா}^2)} \quad (9)$$

(வ்யஜ்யா = வ்யுத்த்ரமஜ்யா = உஜ்யா) என்றுஞ் சொல்வார்கள்.

மேலே சொல்லப்பட்ட புஜ்யா ஸாதனத்துக்குச் சுலபமான மற்றோர் வழியு முண்டு:—

ஜ்யாஸாதனம் இஷ்ட பாகைகளுக்கானால்:—

90° ம் பாகஜ்யா = (த்ரிஜ்யா)வின் முதல் ஜ்யாவை பட்டித்தது சேத்யகர்.

இதை எந்த இஷ்டபாகத்துக்குஜ்யா வேண்டுமோ இதன் முன்பாகஜ்யாவால் குணி;த்ரிஜ்யாவால்வகு, ஈவில் குணித்தஜ்யாவின் முன்பாகஜ்யாவைக்கழி. மிச்சமே இஷ்டபாகஜ்யா-ஆகும்:—

[(த்ரிஜ்யா என்றால் த்ரிஞ்சீஜ்யா என்பது) பூர்வீகர்கள் த்ரிஜ்யாவை 3438' என்கிறார்கள், சுலபத்துக்கு நவீனர்கள் த்ரிஜ்யா = 1 எனக்கொண்டார்கள். இதை அனுசரித்தே முன்னுடைமிலும், ஜ்யாதிகாரின் விகிதம் பதகம் தயார் செய்யப் பட்டிருக்கிறது] :—

இதற்கு உதாரணம்:—

சேத்யகர் = $2 \times \sqrt{(1 - 0.01745 \times 0.01745)}$ ப்ரதி பாகஜ்யா ஸாதனஞ் செய்ய:—

ஷெ ௨ = $(0.9998 \times 2) = (1.9996) =$ சேத்யகர்.

• ஜ்யா 2° று = (சேத்யகர் \times ஜ்ய i \div 1) - (ஜ்யா 1°) று.
= $(1.9996 \times 0.01745 \div 1 - 0.0000) = 0.0349 = (\text{SIN } 2^\circ)$

ஜ்ய. 3° று = (சேத்யகர் \times ஜ்ய. 2° \div 1) - (ஜ்யா 1°) று
= $(1.9996 \times 0.0349 \div 1) - (0.01745) = \text{SIN } 3^\circ = 0.05233.$

ஜ்யா 4° று (சேத்யகர் \times ஜ்யா 2° \div 1) - (ஜ்யா 2°). று

= $\left(\frac{1.9996}{1} \times 0.05233 - 0.0349 \right) = 0.06975 = \text{SIN } 4^\circ$

ஜ்யா 5° று = [(சேத்யகர் \times ஜ்யா 4° \div 1.)] று.

= $[(1.9996 \times 0.06975 \div 1) - (0.05233)]$ று

= 0.08715 = SIN 5°.

என்றில்விதமேஷ்வோர் பாகைகளுக்கும் சுலபத்தில்ஜ்யாஸாதனம் செய்து கொள்ளலாம்.

இவ்விதம் ஜ்யாக்கள்மாத்நீர் தெரிந்தவிடத்தில் கோடஜ்யா ஸாதனம் செய்ய.—

கோடஜ்யா = $\sqrt{1 - (\text{ஜ்யா} \times \text{ஜ்யா})}$ என்றிப்படிக்கணிக்குக.

• இவ்வழிப்படிக்குக் கலாநிதருக்கும் ஜ்யாக்கள் ஸாதிக்கவேணுமாயில்;—

89° 59'க்கு (SIN) ஜ்யா = 0.99999996 என்றவதால் இங்கு இதன்ரட்டி (1.99999992)ப்பே சேத்யாகம். இந்தப்ரதிதலை ஜ்யாஸாதக சேத்யகம் = 1.99999992). இதை சுயாரில் (2) எனத்தோள்ள; பெருக்கி வகுத்து மேன்எள் அடிபடுவதால் கேவலம் பெருக்கப்படுமெண்ணிரட்டிப்பெற்கின்றது.

ஆகையால்:—

$$\left. \begin{aligned} & \text{(ரண்டாம் கலைஜ்யா)} \\ & = \text{SIN } 2' \end{aligned} \right\} = \left\{ (\text{முதல் கலைஜ்யா} \times 2 - \text{ஜ்யா } 0') \right\}$$

$$(\text{ஜ்யா } 3' \text{ ரு}) = (\text{SIN } 3') = \left\{ (\text{ஜ்யா } 2' \times 2) - (\text{ஜ்யா } 1') \right\}$$

$$(\text{ஜ்யா } 4' = \text{SIN } 4') \text{ ரு} = \left\{ (\text{ஜ்யா } 3' \times 2) - (\text{ஜ்யா } 2') \right\}$$

[என்றிவ்விதவழியாகும் இதுவும் 7ஸ்தானம் பரியந்தம் வெகுசுத்தம். இதற்கு மேலும், மிகசுத்தஜ்யா வேண்டுமேயாகில், முதல் பாகஜ்யாவை எத்தனை ஸ்தானம் சுத்தமாகக்கணித்து, இதன் கோஜ்யாரட்டிப்பு சேத்யகமும், எத்தனை ஸ்தானம் சுத்தமாக வகுத்திறதோ அத்தனை ஸ்தானங்களுக்கு கலாதி (அல்லது பாசு) ஜ்யாவுட் சுத்தமாகவே வருந் என்பதாம் :—

(இவ்விதமே — விசலா — உபவிசலாதி — களின் சுத்த ஜ்யா ஸாதனத் துக்குமாம்).]

என்றிவ்விதமாகையால்:—

ஜ்யா (SIN) வேண்டிய இஷ்டகலை முன் ஜ்யாவைரட்டிப்பதிலிதன் முன் ஜ்யாவைக்கழிக்க இஷ்டகலாநிதருக்குரிய ஜ்யா; டெஸ்டில் 7-ப்றைஸ்வரையில் ஸரி ஏரும். விகலாதிக்கோ வென்றால் சேத்யசானுஸாரமாக (9, 14-)ப் பறைஸ்வரையில் ஸரிவருமென்பதை முக்கிய அவசியமாபுணர்க:—

இவைகளே இங்கு முக்கிய ப்ரதான வழிகள். (மற்றவை இங்கல்வளவசிய மில்லை. என்பதால் விடுபட்டன):—

இந்தப்படி மேலே கூறிய ப்ராசீனபத்தி வழிப்ரகாரம் ஏற்பட்ட ஸாரம் யாதெனில்:—

∴ ஓரிஷ்ட சாபாம்ச = A, மற்றோர் சாபம் = B, என்றால்:—

$$\begin{aligned} & \text{ஜ்யா } (A + B) = 2 \text{ ஜ்யா } A. \text{ கோஜ்யா } B - \text{ஜ்யா } (A - B) \} \\ & = \text{SIN } (A + B) = 2 \text{ SIN } A \times \text{COSIN } B - \text{SIN } (A - B) \} \end{aligned}$$

என்றதன் விலோமமாகிய, நவீன கணித ஸமீகரணத்துக்கு மூலமாகிய :—

$$\therefore \text{ ஜ்யா } (A + B) = (\text{ஜ்யா } A. \text{ கோஜ்யா } B + \text{கோஜ்யா } A. \text{ ஜ்யா } B) \therefore$$

[“ சாபயோரிஷ்டயோ: ” எனக்கீழ்வரும்]:—

பாஸ்காப் சார்ய பத்மாநுஸாஸூத்ர மேற்பட்டதற்கும் மூலசாரண வழி, இதன் முன் உதாரணத்தில் காட்டப்பட்ட ரிஷிகளின் பத்ததி, ஸூத்ரங்ஸீகாணங் களையாகும்; என்பது ஆழ்ந்த யோசனையில் உணர்த்தக்கதாகும், வெகுப்பூதின காலததய ஆர்ய பட்டஹிஷ்டத்தை (20000) என்றும் இதன் பாதியறை விட்டத்தை (10000) என்றும் கணித சுலபத்தின் பொருட்டுக் கொண்டுள்ளார்.

இவறைப்பின்பற்றியேதான் நவீனரும் அறை விட்டத்தை (10000 = 1) பதினாயிரத்துக்குபத்தில் ஒன்று எனக் கொண்டது.

இந்த அறைவிட்டம் 1க்குச் சாதனம் செய்த இஷ்டபாகாதி ஜ்யாக்களை இஷ்ட அறைவிட்டத்தின் பரிமாணத்தால் பெருக்கினால் இஷ்ட வ்யாஸாரந்த மாகிய அறை விட்டத்துக்குறிய கோலீய (விட்டச்சம்பந்தத்துக்குறிய) ஜ்யாதிகளாகும்:—

உதாரணமாகப் பூர்வீகர் (ஆர்ப்பட்டர் சவிற) அறைவிட்டமாகிய வ்யாஸார்த் தச்சமம் = (3438)' என்ற கொண்டிருந்தபடியால் இவர்கள் இஷ்டப்படி 30 பாகைக்கு ஜ்யா, வேணுமானால் $\therefore (\text{SIN } 30^\circ \times 3438) = 0.5 \times 3438 = 1719'$ என்பதாகும்

மேலுமிவர்கள் இஷ்டப்படி, பகண மீளல வேலைகளின்.

= 21600' ரு = [(3438' \times 6. 2832) இதன் கருர் =

= [(3437' — 44" — 48") [2 \times 3.14159265]

இதே எதற்கும் சாஸ்தி த்தை யனுசரித்தது:—என்பதாகும்.

இதற்குப் புறம்பானவைகள் சுலபத்திற்கு சௌகரியப்படி ஏற்படுத்திக் கொள்ளப் பட்டது என்பது உணரக்:—

LAOORITHMS (லாகாரிதம்ஸ்) தெரிந்தால் இன்னுஞ் சுலபத்தில் ஸகல கணிதங்களையும் கையானத்தகுமென்பது அவசியமுணரக்.

செக்குச் சரியான விவரணமிங்கு.

இவ்விதம் ப்ராசின பத்ததிப்படி ஏற்பட்ட வழியின் ஸாராய்சம் யாதெனில்:—

இஷ்ட இருவித சாபாய்சங்களை முறையே — அ — க — என்று கொள்ள:—

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \text{ஜ்யா (அ + க)} = \frac{\text{ஜ்யா அ.கோஜ்யா க}}{\text{த்ரிஜ்யா}} + \frac{\text{கோஜ்யா அ.ஜ்யா க}}{\text{த்ரிஜ்யா}} \quad (1) \\ \text{ஜ்யா (அ - க)} = \frac{\text{ஜ்யா அ. கோஜ்யா க}}{\text{த்ரிஜ்யா}} - \frac{\text{கோஜ்யா அ.ஜ்யா க}}{\text{த்ரிஜ்யா}} \quad (2) \end{array} \right\} \therefore$$

யோகாந்தர ஜ்யா ஸாதனத்திற்கு:—

“ சாபயோரிஷ்டயோர்த்தோர்ஜ்யே

மித: கோடிஜ்யகாஹதே ”

த்ரிஜ்யா பத்ததே தயோரைசயம்.

தச்சாபைசயஸ்ய தோர்ஜ்யகா

சாபாந்தரஸ்ய ஜீவாஸ்யாத்

தயோரந்தரஸம்மிதா ”

என்கிற

• ஸ்ரீபாஸ்கராசார்ய வசனத்துக்கு (1, 2) ஆசிய ஆர்ஷ (ரிஷிகள் ஸம்பந்த) பத்ததிஸமீகாணமே மூலமாகும். இவ்வாண்டையும் ஆதாரமாகக் கொண்டு இவற்றை விலேகணிதப்படி யோகாந்தரஞ் செய்ய:—

(இங்கு த்ரிஜ்யா = 1 ::) ∴

(3), ஜ்யா (அ + க) + (அ - க) = (2 ஜ்யா அ. கோஜ்யா க) ∴

இதையும் விலோம கணிதத்தால் கீழ் கண்டபடி செய்ய :—

(4), ஜ்யா (அ + க) = 2 ஜ்யா அ. கோஜ்யா க - ஜ்யா (அ - க) ∴

மகர்ஷிகளோ த்ரிஜ்யாவை (1க்குப் பதிலாக) 3438', - 10000, - 120, - 3415, - என்றிவ்வித மெல்லாம் கொண்டிருக்கிறபடியால் :—

(5); ஜ்யா (அ + க) = $\left\{ \frac{2 \text{ ஜ்யா அ கோஜ்யா க}}{\text{த்ரிபஜ்யா}} \right\} - \left\{ \text{ஜ்யா (அ - க)} \right\}$ இதில்

த்ரிஜ்யாவாகிய (3438'-ஏ) ஹ ரகமாய மைந்தது. மகர்ஷிகள் வாக்யத்துக்கு:—

(குறிப்பு):— ஆகையால் இவ்வவந்தாம் வழியைவிட கணிதசுலபத்திற்காக —4ம் வழியைக் கொள்ளலாம், இவ்வித பேற்படும் ஜ்யாதிகளை இஷ்டவ்யாஸார்த்தங்களால் (3438, 10000, 1000, 100, 120 - 12 - 3415) (ஸ்ரீபதிஸம்மதவ்யாஸாத்தம் = 3415 என்பது) இவைகளால் பெருக்கிக் கொள்ள இஷ்ட வ்யாஸார்த்த ஜ்யாதிகளாகும்.

பத்யரூப வசனத்துக்கே ஆர்ஷ ஸமீகாணமாகிய :—

ஜ்யா (அ + க) = $\left\{ \frac{2 \text{ ஜ்யா அ. கோஜ்யா க}}{(\text{த்ரிஜ்யா})} \right\} - \left\{ \text{ஜ்யா (அ - க)} \right\}$

= $\left\{ \frac{(2 \text{ கோஜ்யா க} \times \text{ஜ்யா அ})}{(\text{த்ரிஜ்யா})} \right\} \left\{ \text{ஜ்யா (அ - க)} \right\}$ இதையே இங்கு

(2 கோஜ்யா க) வை “சேத்யக” பாகவும், “ஜ்யா அ” வை இஷ்ட பாகத்தின் முன்பாகஜ்யாகவும்; கழிவு ஜ்யாவாக “ஜ்யா (அ - க)” இதையும், “ஹாரமாக த்ரிஜ்யாவையு” ற்கொண்டு :—

மகர்ஷிகள் ப்ரதிபாக ஜ்யாஸாதநம் செய்தார்கள். என்பதை அவசியம் உணரத்தக்கதாம் :—

மேலுமிவர்கள் இஷ்டப்படி ஏற்பட்ட வ்யாஸார்த்தத்தால் (3438' ஆல்) பகண கோல கலைகளுடைய = (21600)'ரூ = (3438' × 6.2832) ஆர்ப்படியப் படிக்கு இதன் மிக்கக்கூறர் ஷே ரூ = [(3437' - 44" - 48'') (6.28318531)] என்பது அவசியம் உணர்க. (மற்ற விவரணம் முன் காண்க).

இந்த விதம் ப்ரதி பாகாதி (ப்ரதி அப்ச கலை கலை உபவிகலை முதலிவை களுக்கு ஜ்யாதி ஸாதனம் செய்யும் சுலபபாகா) (ஸம்மத)ம் ஆதி ஸித்தாந்த கல்ப்ப்தரு முக்தாஹாரப் படிக்கேயாது. :—

இதில் பாதிரி பாகஜ்யா ஸாதகபத்தியில் சொல்லிய பத்யங்களான: —

“அந்தஜ்யா நவதிஜ்யாச த்ரிபஜ்யா த்ரிபமௌர்விகா” விஷ்கம்பாத்தம் நு
வ்யாஸார்த்தம் த்ரிஜ்யா நாமாநிசக்ஷதே “(1)”

நந்தேபபாஹுருது (62832) மிதவ்ருத்தே வ்யாஸார்த்தமப்யுத (100000) ஸங்க
யாஸ்யாத்” சக்ரகலா (21600) ஸமவ்ருத்தே, வ்யாஸார்த்தம் கஜபூரபத்தி வஹ்நி
(3438) மிதம்” (2)”

பரிதே: கார்க்கராமாம் (360)ச: ஏகாம்சஜ்யார்த்தமுச்சயதே”
ஏகாம் சஜ்யார்த்தவர்க்கோந த்ரிஜ்யாவர்க்காச் ச யத்பதம் “(4)”

ஏகோந நவதிஜ்யாச உபார்த்தஜ்யா பாகீர்த்திதா”
ஏகோந நவதிஜ்யார்த்தம் தவிநிச்சம் (சேத்யகம்) பவேத் “(4)”

ஏகபாகஜ்யா நிக்நம் சேத்யம்வ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலம்”
தவித்யபாக ஜீவாஸ்யாத் இதுபுத்தம் தத்வவேதி: “(5)”

தவித்யபாக ஜீவாக்கநே, சேத்யே, வ்யாஸார்த்தஹ்ருத்பலே”
ஏகபாகஜ்யா ஹீநேத்ருதீயாம் சஜ்யகாஸ்மருதா “(6)”

த்ருதீயாம்சஜ்யகாநிக்நே சேத்யேவ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலே”
தவித்யஜ்யார்த்த ஸம்ஹீநே சதுர்த்தாம் சஜ்யகாபலேத் “(7)”

சதுர்த்தஜ்யார்த்த நிக்நம் யத் சேத்யம் வ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலம்”
த்ருதீயாம்சஜ்யபாஹீநம் பாணாம் (5) சஜ்யாததாபலேத் “(8)”

சராம்ச (5) ஜ்யாதயாநிக்நே சேத்யேவ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலே”
துரீயாம் (4) சஜ்யபாஹீநே ரஸாம் (6) சஜ்யேதிகீர்த்திதா “(9)”

ஷடம்சம் சஜ்யாதயாநிக்நம் சேத்யம் வ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலம்”
விஷயாம் (5) ரஜ்யபாஹீநம் தத்ஸ்வாம் (7) சஜ்யகாஸ்மருதா “(10)”

ஏவம்ஜ்யார்த்தநிநவதிம் ஸாதயேத்பண்டிதோத்தம்”
ஜ்யோத்பத்தி: தர்சிதாப்யேவம் கோலவித்பிரம்மஹர்ஷிபி: “(11)”

வ்யாஸார்த்தவர்க்காத்பாஹுஜ்யாவர்க்கஹீநாச் சயத்பதம்”
கோடிஜீவா தயா ஹீநாத்ரிஜ்யா வ்யுத்தம்மௌர்விகா “(12)”

த்ரிஜ்யாஹதாபாஹுஜீவா கோடிமௌர்வ்யாவிபாஜீதா”
லப்தந்நுஸ்பர்சரேகா ஸ்யாதித்யுத்தம் மாதவாதிபி: “(13)”

வ்யாஸார்த்தநீகோடிஜீவா பாஹுமௌர்வ்யாவிபாஜீதா”
வ்யுத்தம்ஸ்பர்ச (கோடிஸ்பர்சக) ரேகேதிகீர்த்திதம்மஜ்ஜுளாதிபி: “(14)”

த்ரிஜ்யாவர்க்க: கோடிமௌர்வ்யாபக்த்த: கர்ண இஹோச்சயதே “-”
த்ரிஜ்யா வர்க்கஸ்து;

தோர்ஜ்யாப்த: பவேதுத்தம்மகர்ணக: (ஸ்யாத்கோடிஸ்பர்சகர்ணக:) “(15)”

குறிப்பு:— அந்த்யஜ்யா = நவதிஜ்யா = த்ரிபஜ்யா = த்ரிபமௌர்விகா
= விஷ்கம்பாத்தம் = வ்யாஸார்த்தம் = த்ரிஜ்யா என்பதன் வேருபேயர்கள்

மேற்கூறிய (15) பத்யங்களின் பொழிப்புறை:—

(பரிதி) வருத்தப் (வட்டம்) = 62832. ஆனால்; (அறை வியாஸம்) (அறைவட்டம்) = 10000.

பரிதி 21600' ஆனால் வியாஸப் பாதி = $\frac{1}{2}$ விட்ட = 3438'.

$$\therefore 2 \pi = \frac{62832}{10000} = \frac{21600}{3438}$$

\therefore (முதல் பாகஜ்யா = (வருத்தஸய சத (100) பாகாட்ச: தண்டவத்ருச்ய தே து ஸ:).

(என்கிற (லகதமகர்ஷி) வாக்யப்படி இந்த ஆதி ஸித்தாந்த கல்ப்பதரு முகத்தா ஹாரப்படி க்கும்) = (ஜ்யா 1°) ரு = $\left\{ \frac{62832}{360^\circ} \right\} = \left\{ \frac{21600}{360^\circ} \right\}$

$$= \left\{ \frac{175}{10000} \right\} = \left\{ \frac{60'}{3438} \right\} \therefore = \left\{ \frac{(62832)}{(360^\circ \times 10000)} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(21600)}{(360^\circ \times 3438)} \right\} \cdot \text{முறையே ஆகும்:}$$

இவ்விதமே முதல் பாகஜ்யா ஸாதனமாம்—இதற்கு மேல் பட்ட 2,° 3,° 4,° 5,° முதலிய பாகஜ்யா ஸாதனங்கட்கு பத்யப்படி ஏற்பட்டவைகளை பக்கம் (138)ல் காண்க

இப்படியேற்படுவதால் பின்பு வந்த நவீனர்கள்:—

ஒர் பாகைக்குறிய சாபத்தை அல்லது கோணத்தை (க°) என்றும், வேண்டிய ஜ்யா (சாரிய அல்லது கோணிய) பாகங்களின் முன் பாகங்களுக்குறிய எண்களின் இடத்தை (அ°) என்றுங்கொண்டபடியால்:— இவர்கட்கும்:—

இவ்விடபாகங்களுடைய ஜ்யாஸாதனத்தின் பொருட்டு:—

இங்கு இவர்கள் த்ரிஜ்யாவையும் (1 = ஒன்று ஆக மதிப்பதனால்):—

[ஜ்யா (அ + க)] = [2 கோஜ்யாக் + ஜ்யா அ — ஜ்யா (அ — க)].
என்றேற்பட்டது.

இச்சமீகரண கண்டங்களை ஒன்றிலொன்றை மாறி மாறி யோக வியோகங்கள் செய்து நல்லயுக்தியுடையவர்கள் கணிதங்களைக்கணக்கிட த்ரிகோண மிதிகட்கு வேண்டிய (ட்ரிக்ணமெட்ரி தியரிகள்) ஸகலஸித்தாந்தங்களுமேற்படுகின்றன. (பரிதி பாகங்களுக்கும் ஸாதனஞ் சேய்ய வேண்டி ஸூக்ஷ்மஜ்யாவிதவிதி முன்னுறையிலு காண்க):—

மற்றயவிவாணங்கள் வேண்டியபர்பந்தம் கூடுமானவறையிலும் இதன் முன் பின்வந்தார்ப்பங்களில் கூறியவற்றைக்கவனிச்சுக:— இவ்விதங்களை ஏனிற்கு கூற

வேண்டுமென்றால் :—நவீனங்களில் எந்தவிதமான கணிதங்களின் உற்பத்திக்கும், மகர்ஷிகள் காலத்திய ஸூத்ர ப்யயுதாங்களாயுள்ள கணிதமீதிகளே மூலாதாரம் என்பதைக்காண வேண்டியது யாவரும் என்ற நோக்கத்தால்:—

என்பது அவசியம் உணர்க:—

எதுலுமின்னும் பலவாறாக விகிதங்கவிரிந்தாலும் விழிவடையும்என்பதால் சிற்சில விசேஷங்களைமந்த கோட்டுக் கணிதங்களும் இவ்வளவுடனிற்கு முடிவடைந்தன.

வேறு :—

விருத்தம்

ஒரு பதினானூடே உத்திடுமருபதுக்கே

வருநிலமென்ன வென்னில்

மருவிய ஒன்றுக் கோர்

வர்ககம் (கோராகவும்) ஏனாத்து வீரே—(46)—

என்பது

கீள் மேல் — யசு (16) ரு தென்மடல்—

உயி (20)ரு யெத்தனைஎன்னில்—

யசு (16)யும் — ய ($\frac{1}{16}$)ல் களிக்க — க (1) —

உயி (20)யும் — (ய) $\frac{1}{16}$ ல் களிக்க — கவ (1 $\frac{1}{16}$) —

ஆகையால் — கவ ரு (க) (1 $\frac{1}{16}$ ரு) — (11 — 9) —

என்பது.

யெதுவும்படிப்பார்த்துச் சொல்லவும்:—

வெண்பா:—

பாராய்கீழ்மேல் பனிரண்டே தென்மடலே

ஒராமல் (ல்) நிலமுக்காணியாம்:—

நேராக - வந்தநில முந்திரியாய் மாறுபதினானூலே

தேரந்த முருகைக்கியந்து சரிகொல்:—

(47)—

என்பது:—

கீழ்மேல் - யிஉ (12)ரு த்தென்மடலையாமல் நிலம் சூ ($=\frac{3}{8}$) யானால் தென் ம(வ)டல் சொல்லவியும் வகை:—

முக்காணி (சூ $=\frac{3}{8}$) நிலத்தையும் முந்தியப்படுத்த - யிஉ (12) - இதை முந்தியிக்

குழி - யசு (16) என்று - யசு (16)ல் மாறாகயிஉ (12 \times 16 = 192); இதை

ஒருகைகொல் - யிஉ (12) ருசூய சுயவு - யசு (16) ஆதலால்,

தென்வடல் - யசு(16) என்பது:—

விருத்தம்:—

கட்டியோ ரெட்டு மாத் துக் காலரை முக்காலாகும்:—

செட்டியார் செத்துப் போனார் சிறுபிள்ளை மூன்றுபேரும்:—

வெட்டியும்(யோ) பகரொண்ணது; விலையுமோ குறை யொண்ணது:—

சட்டியாம்ப்பகாவல்லார் கனக்கர் கோடாஸ்யாமே = (48)

என்பது:—

அ'இ - ச, அ'வ - உ, அ'த - கூ - ஆ சிறை-ய உ. - = $(8 \times \frac{1}{2} = 4$
 $8 \times \frac{1}{4} = 2, 8 \times \frac{3}{4} = 6) =$ ஆ சிறை - 12 -

இதை ந (3) ருக்குநக்க ஈய்வு - ச -

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ந வ த - ந த உ வ - உ இ - ஆ சட்டி (அ)} \\ 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - 3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4} - (2\frac{1}{2} - \text{ஆ கட்டி} = (8) \end{array} \right\}$$

ரு நிறை ச - (4) உ த $(2 \times \frac{3}{4})$ ரு $(1\frac{1}{2}) - 2$ வ $(2 \times \frac{1}{4}) =$ இ $(\frac{1}{2})$, உ (2) ஆ அ (8) ரு
 ச (4) ரு சனம் (சாய்) ந (3) ரு நிறை - ய உ (12) ி:—

குறவெட்டி வவுக்கு:—

விருத்தம்:—

செப்பிய கிள்மேல் முப்பத்திரண்டு, தென்மடலீரெட்டு—

ஒப்புடன் மட்டு முக்காலுக்குப் பணமுறைக்க வேண்டில்—

தப்பிலாமட்டிலோரைத - தாக்கியோர் கய்ய (கைய) விசத்

திப்படியாகச் செய்தே யிண்டையும் மாபச் சொல்லே = (49)

என்பது:—

கிழ்மேல் - நயஉ2(32) ரு தென்மடல் - யச (16) ரு மட்டு - த $(\frac{3}{4})$ ரு யெத்தனை
 யென்னில்:—

பெருக்காமல் குறுக்குத்தானம் பார்ப்பது :—

நயஉ (32)ம் - ய $(\frac{1}{6})$ விசத்தில் (மாகாணியில்) எனிக்க - உ (2); யச (16) (ம்)
 யும் மட்டில் கழிக்க - யஉ $(16 \times \frac{3}{4} = 12)$ இதை ரெண்டில் மாற -
 உயச (24) ஆதலால் ரெ உயச (24) என்பது.

ஆசிருவிருத்தம் :—

- கைய(யொ)த்தபிடியி லொருபத்து கொண்ட கோலினிற்

குள்மேலாலுமே - கனிவான - தென்மடல் ஒரு

னான்கு மட்டொன்று - கண்டபண பொன்றாகவே

மெய்த்தரிடி முன்னன்கு ருங்கோலதால் - விரும்பு

கிள்மேலார தாய் வினைய தென்மட லீரெட்டிதாய்

மட்டுமேயறை இதற்குவிலையை வைத்தலுறைசெயிற்

பிடியளவுதனைமாற வாசுதனிரண்டு (கையுடம்)

கையுடம் — ரவாதுதாக்கி — முன் து சையி

விது மாத்தி யே மட்டினிலுரைக்கமுதலை

(3) நெயுத்த சிவ (கை) விசின் பிடியுமிடாடியு மே —

நெருங்கை பட்டுமே தான் — நீகண்டது கையை —

முன்னே விண்டதர்க்குதவி நீதிபென்றுரை செய்யவே — (50) —

என்பது —

— யி (10) பிடிக்கோலால் கன்மேல் — ச (4) ரு சென்படல் ச (4) ரு — மட்டு — க
(1) ரு ப — க (1) — ஆ — யி (12) பிடிக்கோலால் — கை கூ (6) ரு தென்
மடல் — யிசு (16) ரு பட்டு — இ (1/2) ரு பட்டு பெத்தனையென்னில் :—

— யி (10) ம் தனக்குமாற — ள — (100) — சருச — மாற — யிசு
(4 × 4 = 16). யிதை முன்னிருத்தின — ள — (100) டனே (தாக்க) சூசுள
(16 × 100 = 1600) யிதை மட்டு (க = 1)ல் கழிக்க சூசுள
(1600 = 1600) என்று நிருத்தி — யி (12) யுந்தன் னில் மாற — ராசயிசு
(12 × 12 = 144) — யிசு ரு சருமாற கூயிசு (16 × 6 = 96) யிதை
ராசயிசு (144)ல் மாற — யிசு ரு சருமாற கூயிசு = (96 × 144 = 13824) யிதை
பட்டு — இ (1/2) யில் களிக்க — சூசுளயிசு

= (13824 × 1/2 = 6912) — முன்பு — (பணம்) க (1)ல் மாற
— சூசுளயிசு (6912) யிதை முன்னிருத்தின — சூசுள (1600) ரு கருடுக்க
யிசு — சயி ரு கை (1/2) (= 4 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + 1/1024)
= 4 1/256 = 4 1/256 இம் பத்யுடிக் கிவ்விதமேற்படுகின்றது — என்பது
[சு (1/256) = 4 1/256 = 4 1/256 என்று வருகிறது. இதே சுத்தமென்பது
வெகுத்தெளிவு, இதற்குமதற்கு முள்ள வித்யாஸமே = (1023/3200 - 1024/3200)
= (-1/3200) என்பதாகின்றது. நியத பின்னத்தையனு சரித்த படியால் என்ப
துணர்க :—

விருத்தம் :—

பதிக்கொண்டலூர்ல் பாதியு - (ம்) - முன்றலோர் பாவியமு

னாலிலோன்றாய் பகறிய —

லூர்லோர் கூறுடைய நால்வராம்.

பகுதி பொன்னீரூ ராகுமே (2 × 6 = 12) விதிகொண்ட

படியிவை வகுத்திடி. (ல்) மேன்மையாம்

வேண்டு பதினஞ்சு பொன்னே —

மேவியிடிஸ் முன்றுபொன் பிறவட்டொன்றிதனை—

விருகவே தெறிந்தே - மதிக்கொண்ட

காணிக்கா ? சரிசெய்யும் (வகையினை)

வசையினை வளர்த்து வேனன் பாகவே.—

வரிசையுடன் வா வா குரு (வாகாகவரு) மந்தரீனில்:—

முன்வந்திடும் பொன்னை மாறியே:—

நிதி கொண்ட பதினஞ்சு பொன்தனக்:—

குதவியே நீதந்த பிடினன்குமே:—

நேசித்த பிரவட்டம் முன்வட்ட:—

மிது சட்டம் நிற்பெயற்றுறை (சிச்சயிற்றுறை) செய்கவே = (51) =

என்பது:—

(விபரம்:—)

ஊருக்கு பாதிக்காரன், ரூ (3)ல் ஒரு காரன்-

ச (4)ல் ஒரு காரன்- கூல் (6ல்) ஆறில் ஒரு காரன்:—

ஆசனம் - ச (4) ரு பொது விவற்றயிரா

ஹை (பொதுப்பகுதி) - 12 ப— (பொன்)

இதை அவரவர் ஈவு வீதமாக பிறிக்கல்

பாதிக்காரனுக்கு ஹை - கூ — $(\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = 6 \text{ பொன்})$

கூல் (3ல்) ஒரு காரனுக்கு - ச — $(12 \times \frac{1}{3} = 4 \text{ பொன்})$

ச (4)ல் ஒரு காரனுக்கு ஹை ரூ — $(12 \times \frac{1}{4} = 3 \text{ பொன்})$

கூ (6)ல் ஒரு காரனுக்கு ஹை உ — $(12 \times \frac{1}{6} = 2 \text{ பொன்})$

ஆசனம் - 12 (15) (பொன்) யிதில் அதிகம் ஹை - ரூ (3) பொன் ஆனடியால் சரி சொல்ல வை:—

பாதிக்கு வந்த ஹை - கூ (6 பொன்னும்) பிரவட்டம் ஹை - 12 (12) யும் மாற - எயு (12 × 6 = 72) - இதைக் கூடுதல் ஹை - 12 (15) ருக்

குடுக்க ஈயவு - ச ப— அ = $(\frac{72}{15} = 4\frac{12}{15}, \frac{12 \times 6}{15} = 4 \text{ ப— } 8)$

ஆதலால் பாதிக்காரனுக்கு ஹை ச ப— அ (4 ப—8); கூல் ஒரு காரனுக்கு - சம் (4ம்) - 12 (12)ம் மாற ச 12 அ (48 = 12 × 4) இதை - 12 (15) ருக் குடுக்க - ரூ ப— உ (முன் போல் $\frac{48}{15} = 3 \text{ ப— } 3$), ஆதலால் ரூ ப— உ (3 ப—2) என்பது:—

சல் - ச - ரு ($\frac{1}{3}$ ரு) ரூ (3)ம் - 12 (12)ம் மாற — ரூயு (36) இதை - 12 (15) ருக் குடுக்க ஹை - உயு (36 × $\frac{1}{3} = 2 \text{ ப— } 4$) கூல் -ச- (காரனு) க்கு — உ - 12 மாற - உயு (2 × 12 = 24) யிதை - 12 (15) ருக் குடுக்க ஈயவு - ரூயு (16 ப— = $\frac{24 \times 10}{15} = \frac{240}{15} = 16 \text{ ப—}$) ஆதலால் ஹை - ச ப— கூ ($\frac{16}{15} = 1 \text{ ப— } 6$) என்பது:—

இப்படி வரிவிதுவே தானமாகக் கண்டு சொல்லவும் — உள் வட்டமாக வத்தாலு மிதுவே தானமாகக் கண்டு சொல்லவும்.

செ பொன்—பணம்

செ 4 — 8

செ 3 — 2

செ 2 — 4

செ 1 — 6

செ 12 — 0

ஆக பஞ்சிப்பொன் 12ம் சரி. இங்கு பணம் பத்துக்குப் பொன் ஒன்றாகக் கொள்ளப்பட்டிருப்பதைக் கவனிக்க வேண்டியது:—

விருத்தம்:—

உத்த தோர்காதம் காதம் ஒரு படி யடி போல் வேடன்

உத்தலும்(முப்) உத்தல் வேணும் நேரு நறலெத்து (நாலெத்து) [காதம், அ]

பத்தனை ரெட்டிசெய்தி நயிது தனிலென்று நீக்கி.

சுத்தமாங்கலம் உத்தரெச்சு நகத்தைத் துணிந்து பாரேன் (52)

என்பது:—

ஒருபன்னி நாலொன்றுக்கு இருபதுகாதமோடும், அதை ஒரு வேடன்னொன்றுக்கு காதம்கொடுக்கப் படியடித்துக்கொடுக்க வேண்டியவன் எத்தனை வேடையில் பிடிப்பானென்னில்:—

பன்னி ஒக்கொகாதம் — உய (20)ம் பட்டிக்க — சய [(40) = (20 × 2)] அதில் ஒன்று நன்னி நீக்கு நயக = [(40 — 1) = (39)] ஆதலால் — 39 = (நயக) வேடையில் பிடிப்பானென்பது —

விருத்தம்:—

முப்பத்தியண்டு பனையைத்தெண்டு முனித்தொருவன் —

சாணரி விரல் நாலெதானி (வ்) எப்பவது சென்று

முமென்று முன்னியன்ற முனத்தனை

சாணபேத் தியேதான்,

ஒப்பரிய சான் விரல்தான் பனியண்டாக

வற்ற; துக்கைய மாரித்த முயருமென்றே செப்பிய

தொரிருனிலைவர்க்கியத் தெண்டு

செருனின்னதென்று செப்பலாமே (53)

(முடப்பனை) = நயக (32) முனம்; சான் = சுச (64); [சான் — க — (1)

ற வில் — யக (12)] ஆக எகயஅ = (64 × 12 = 768) யிதை சாணகய

யில் — யக (12) [தானத்த] வில் — ச (4) நீக்கி — அரு (8க்கு)க்குடுக்க

யிடி — சுயக (768 = 96). ஆதலால்:—தொண்ணுத்தாறு [(96 = சுயக)]

நாலையிலேறுமென்பது.

மாவிடை பிளவதாகும்: பிளவிடை குன்றியாகு

மந்தேவுமாய் குன்றிரண்டு சிரந்த மஞ்சாடியாகு

மாவு மஞ்சாடி அஞ்ச மங்காலதுநாதம் கூடிற்

கர (கா) வியம் கண்ணைய் சொன்னேன் களஞ்சென்ன களவாமே

= (54). என்பது உ. —————

அணுயெட்டு கொண்டது கதிகரென; கதிகரென எட்டுக்கொண்டது தொத்தகன்-
தொத்துகள் — அக் கொண்டது பஞ்சட்டு — பஞ்சட்டு யெட்டு கொண்டது
துண்பணல் — துண்பணலெட்டு கொண்டது நொன் மணல் — நொன்
மணல் — அ — கொண்டது ஐய்வி — ஐய்வி அக்கொண்டது கடுகு — கடுகு
எட்டு கொண்டது எள்ளு — எள்ளு-அ(8) கொண்டது நெல் — நெல் -அ-
கொண்டது விரல் — விரல் யெ (பனிறண்டு) கொண்டது சாண் — சாண்
உ (2) ரண்டு கொண்டது முளம் — முளம் செண்டு கொண்டது சிருகோல் —
சிருகோல் — ச (4) நாலு கொண்டது செம்பியவா — கன்றிருவுலகளந்த
செம்பொற்கோலே (இது) அ (8)க் கோல் நூ-(500 = ஐந்தாறு) கொண்டது
கூப்பிடு — கூப்பிடு — ச (4 = நாலு) கொண்டது காதம் — யிந்த விதம்
பாத்துக் கொள்ளவும்:—

வேறு:—

ஒருவர்த்தகன் மாணிக்கம் கொண்டு

வந்து ருசாவைக் காண

ருசாவும் மதிக்க மந்திரியிடத்தில் சொல்ல

மந்திரிமார் — (யெ = 10) — பேரும்:—

விடை சொன்னதற்கு வகை:—

- (1) முதல் மந்திரி யென்சம்பளத்தில் பாதிபார் குறை ஒன்பதுபேர் சம்பளமும் பெறு பென்றான்:—
- (2) இரண்டாம் மந்திரி யென்சம்பளத்தில் முனிலென்றுங்குறையொன்பது பேர் சம்பளமும் பெறுமென்றான்:—
- (3) மூன்றாம் மந்திரி யென் சம்பளத்தில் - ச (1)ல் க (1)ம் குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறுமென்றான்:—
- (4) ச (4)ம் மந்திரியென் சம்பளத்தில் ($\frac{1}{4}$)ம் நூல் கம் குறையொன்பதுபேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—
- (5) நூ (5)ம் மந்திரி யென்சம்பளத்தில் - கூ-ல் - கம் ($\frac{1}{5}$)ம் குறை ஒன்பதுபேர் சம்பளமும் பெறுமென்றான்:—
- (6) கூ (6)ம் மந்திரி என்சம்பளத்தில்-எல்-கம் ($\frac{1}{6}$)ம் மத்த ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—
- (7) எ (7)ம் மந்திரி என்சம்பளத்தில் - அ-ல் - கம் ($\frac{1}{7}$)ம் குறை யொன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—

- (8) அ (8)ம் மந்திரி என்சம்பளத்தில் ($\frac{1}{9}$)ம் கூல் - கம் குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—
- (9) கூ (9)ம் மந்திரி, யென் சம்பளத்தில் - டில் - க - ம் ($\frac{1}{10}$)ம் குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—
- (10) டி (10)ம் மந்திரி என் சம்பளத்தில் - க - டில் - க - ம் ($\frac{1}{11}$ ம்) குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—

யிர்தவீதம் சம்பளம் விதிச்சுச் சொல்லவும்:—

[இக்கணிதகர்த்தா மேற்கூறிய கணிதத்துக்கு; மற்றவை கட்டுக்குப் போல் உதாஹரணம் விடைகணிக்காமல் வினாவோடு விட்டு விட்டார்:—

ஆகிலும் இவ்வினாவுக்கு உதாஹரண விவரணத்தினால் விடையளிக்கப் படுகிறது:—

இவ்வினாவிகப்பெரிய தாகையால் முதலில் சிரிய உதாஹரணங்காண்க:—

மேல் கணக்கில் மொத்தம் அடங்கிவர்கள் 10 மந்திரிகள்:—

நாமிங்கு முதல் 3 மந்திரிகளை மாத்திரம் கொள்வோம் அப்போ:—

இங்கே தெரிய வேண்டியதற்கு = ?; என்று கௌள்.

$$\frac{?}{2} + \frac{?}{3} + \frac{?}{4} = ? \quad \therefore ? = \text{என்ன, வென்றால்:—}$$

இங்கு தெரிந்த எண்களாகிய - 2, 3, 4 இவைகளை ஒன்றுக்கொன்று பெருக்கவும். ஒன்றிலொன்று அடங்கு மெண்ணினால் அவ்வடங்குமெண்ணை விட்டு மற்றவற்றைப் பெருக்கக் கணிதம் சுலப்பத்தில் முடியும்:—

$2 \times 3 \times 4 = 24$. இங்கு 4ல் 2 அடக்கமாகையால் ஷை 3×4 மாத்திரம் பெருக்கப்போதும் இதன் $= 3 \times 4 = 12$.

24 ரு பதில் 12 ஐயே உபயோகிக்கலாம். —

$$\frac{?}{2} = \frac{1}{2}?, \frac{?}{3} = \frac{1}{3}?, \frac{?}{4} = \frac{1}{4}? \therefore$$

$$\text{ஷை } 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$12 \times \frac{1}{3} = 4$$

$$12 \times \frac{1}{4} = 3$$

$$\text{ஆக } = 13$$

இக் கூட்டுத்துகை (13) ரு 6, 4, 3 முதலியவையானால் ஹரகமான (12) ரு உறிய விதமென்ன வென்று தற்றைரசிக்கப்படி கணிப்பதே மந்திரிகள் குடுக்குந் துகையாம்.

$$\begin{aligned} \frac{12}{13} \times 6 &= \left(\frac{72}{13}\right) = 5\frac{6}{13} \\ \frac{12}{13} \times 4 &= \left(\frac{48}{13}\right) = 3\frac{9}{13} \\ \frac{12}{13} \times 3 &= \left(\frac{36}{13}\right) = 2\frac{10}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5\frac{6}{13} + 3\frac{9}{13} + 2\frac{10}{13}) &= 12 \\ (5 + 3 + 2 + \frac{6}{13} + \frac{9}{13} + \frac{10}{13}) &= (10 + 2) = 12. \end{aligned}$$

என்பதாம்:—

இவ்விதக் கணக்கு (142, 143, 144)ம் பக்கத்தில் (பிறவட்டம் உள் வட்டம்) என்கிற விகிதத்தில் போடப்பட்டிருக்கிறது. ஆகையால் கர்த்தாவால் உதகரிக்கப்படவில்லை. அதைவிட இந்தக்கணக்கு சில விஷயத்தில் மாறியிருப்பதால் விவரிக்கப் படுகின்றது.

இந்தக் கணக்குப்பிறவட்டத்தை யனுசரித்ததாகும்.

வர்த்தகன் கொண்டுவந்த மாணிக்கத்தின் விலை இன்னதென்று தெரியாத படியால், இப்படித் தெரியாத விலைத்துகைக்கு = (து) என்ற குறிப்பிடுவோம். விலைத்துகைக்குச் சமம் (து) ஆனால்:— மந்திரிமார் பத்துப்பேரும் கொடுக்கச் சம்மதித்த மாணிக்க விலைத்துகையோ சீழ்கண்ட வீதத்தில்:—

$$து = \left(\frac{து}{2} + \frac{து}{3} + \frac{து}{4} + \frac{து}{5} + \frac{து}{6} + \frac{து}{7} + \frac{து}{8} + \frac{து}{9} + \frac{து}{10} + \frac{து}{11} \right)$$

ஆகையால் (து = ?) என்ன வென்றால்:—

அதாவது மிகச் குறைந்த துகை என்ன:—

என்பது தான் பொருளிங்கு.

செ (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) இவைகளின் (அடக்களண் தவிர்த்த மிச்ச எண்களின்) பெருக்குத்து கைக்குச்சமம் = $(6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11)$ ரு = (332640) இதை இன்னுங்குறைச்சலாம் [(அ-பொ-ம) = (L. C. M.)] அளவைப்படிக்கு:—

$$\left. \begin{array}{l} 2) 6,7,8,9,10,11 \\ 2 \mid 3,7,4,9,5,11 \\ 3,7,2,9,5,11 \end{array} \right\} \therefore \left\{ \begin{array}{l} (11 \times 5 \times 9 \times 2 \times 7 \times 3 \times 2 \times 2) \\ = (83160) \text{ என்றாகும்} \end{array} \right.$$

$(332640 : 83160) =$ படங்கு (4) வீதத்தில் குறைவதை இங்கு கவனித்தல் வேண்டியதாம்:—

செ துகைக்குறியபங்கைக் கண்டுபிடிக்க (83160) தான் முக்கியமான முதலாதாரமாகின்றது.

பின்பு:—

(மந்திரிகளின் சம்பளவிகிதம் தனித்தனித் தேரியவேண்டுமானால்:— இனி சொல்லு, வழியையே முக்கியமாகக் கொள்ள வேண்டியது):—

$$து \times (83160 \times \frac{1}{2}) = \left(83160 \times \frac{து}{2} \right) = (41580) து$$

$$து \times (83160 \times \frac{1}{3}) = (27720) து$$

$$து \times (83160 \times \frac{1}{4}) = (20790) து$$

$$\begin{aligned}
 (83160 \times \frac{1}{9} \text{ து}) &= (16632) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{6} \text{ து}) &= (13860) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{7} \text{ து}) &= (11880) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{8} \text{ து}) &= (10395) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{9} \text{ து}) &= (9240) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{10} \text{ து}) &= (8316) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{11} \text{ து}) &= (7560) \text{ து}
 \end{aligned}$$

$$(\text{ஆகமொத்தமும்}) = (167973) \text{ து}$$

இங்கு புதிதாக ஏற்பட்ட எண்ணுக்கு = (167973) து; இதே ஹராகமாகும். மேலே வரிசையாய்க் கூடுமென்களாக வந்த (41580, 27720,) இது முதலியவைகளை $\left(\frac{83160}{167973} \right)$ இதனால் தற்மூலிக முறைப்படிப் பெருக்கக்கிடப்பவைகளே:—

(சுலபகணிதத்துக்காக).

83160	(1)	167973	= (1)
166320	(2)	335946	= (2)
249480	(3)	503919	= (3)
332640	(4)	671892	= (4)
415800	(5)	839865	= (5)
498960	(6)	1007838	= (6)
582120	(7)	1175811	= (7)
665280	(8)	1343784	= (8)
748440	(9)	1511757	= (9)
831600	(10)	1679730	= (10)

$$41580 \times \frac{83160}{167973} = 20585 \frac{68595}{\text{ஹ}} \quad (1)$$

$$27720 \times \frac{83160}{167973} = 13723 \frac{101721}{\text{ஹ}} \quad (2)$$

$$20790 \times \frac{83160}{167973} = 10292 \frac{118284}{\text{ஹ}} \quad (3)$$

$$16632 \times \frac{83160}{167973} = 8234 \frac{27438}{\text{ஹ}} \quad (4)$$

$$13860 \times \frac{83160}{167973} = 6861 \frac{134847}{\text{ஹ}} \quad (5)$$

$$11880 \times \frac{83160}{167973} = 5881 \frac{91587}{\text{ஹ}} \quad (6)$$

$$10395 \times \frac{83160}{167973} = 5146 \frac{59142}{\text{ஹ}} \quad (7)$$

$$9240 \times \frac{83160}{167973} = 4574 \frac{89898}{\text{ஹ}} \quad (8)$$

$$8316 \times \frac{83160}{167973} = 4117 \frac{13719}{\text{ஹ}} \quad (9)$$

$$7560 \times \frac{83160}{167973} = 3742 \frac{134634}{\text{ஹ}} \quad (10)$$

1.	20585		(இவைகளின் மிச்சங்கள்)	
2.	13723		68595	(1)
3.	10292		101721	(2)
4.	8234		118284	(3)
5.	6861		27438	(4)
6.	581		134847	(5)
7.	5146		91587	(6)
8.	4574		59142	(7)
9.	4117		89898	(8)
10.	3742		13719	(9)
	<u>83155</u>		134634	(10)
			<u>839865</u>	= பின்னங்களின் கூடல்.

$$[(839865) \div (\text{ஹம்} = 167973)] = (839865 \times \frac{1}{167973})$$

$$\text{முன்} = \frac{5}{83155}$$

$$\text{ஆகமொத்தம்} = \frac{83160}{\text{ஹ}}$$

இவ்விதம் திறைஞ்சிக உதவியின்றி கணிதமே உலகத்தில் இல்லை பொதுவாக.
ஆதலால் மாணிக்கத்துக்காக விலக்கு

$$\text{முதல் மந்திரி கொடுத்ததுகை} = 20585 \left(\frac{68595}{\text{ஹ}} \right)$$

$$2 \text{ ம்} \quad \text{செ} = 13723 \left(\frac{101721}{\text{ஹ}} \right)$$

$$3 \text{ ம்} \quad \text{செ} = 10292 \left(\frac{118284}{\text{ஹ}} \right)$$

4 ம்	செ	=	8234	$\left(\frac{27438}{\text{ஹ}}\right)$
5 ம்	செ	=	6861	$\left(\frac{134847}{\text{ஹ}}\right)$
6 ம்	செ	=	5881	$\left(\frac{91587}{\text{ஹ}}\right)$
7 ம்	செ	=	5146	$\left(\frac{59142}{\text{ஹ}}\right)$
8 ம்	செ	=	4574	$\left(\frac{89898}{\text{ஹ}}\right)$
9 ம்	செ	=	4117	$\left(\frac{13719}{\text{ஹ}}\right)$
10 ம்	செ	=	3742	$\left(\frac{134634}{\text{ஹ}}\right)$

$$\left\{ \left(\text{ஆடாணிக்கத்துக்காக வர்த்தக} \right) \left(\text{இச்சுக் கொடுத்ததுகை} \right) \right\} = 83160 = (\text{து}) \left\{ \right.$$

இதனால் அந்த மந்திரிமார்கள் சிப்பளத் துகையையும் தீற்றரசி க்கணித ல்கீதடபடி கவிப்பாசத்தொந்தக் கொள்ளலாம் :—

என்பது:—

வேறு:—

௩ (3) ன - க (1) உரி - (ய = 10)ந் தாந்தில் யெ (12) அடிக்கோலால் - குழி ன - ரு (100-க்கு) எ (7) உரிக்காலால் செ - அயிச (84) ன ஆ அ (8)ந் தறத்தில் - யிச (16) அடிக்கோலால் குழி கூய (90)ரு - கூ (6) அடிக்கோலால் கோலால் நெல்பெய்வள வென்று கேட்டால்:—

சொல்லவகை:—

— யெ (12) டியுந்தன்னால் மாரி - ன (100)ல் பெருக்கி, பெருக்கினதுகையை யெட்டில் பெருக்கியிதனை கடசி - கூ - (6)ல் பெருக்கி நிருத்திக் கொண்டு முத்துகையும் எ (7) யும் பெருக்கி நெல் அயிச (84) ன - ல் பெருக்கி யிதனை - யிச (16) யுந்தன்னில் மாறின் அகையுடனே பெருக்கி யிதனை குழி கூய (90)ல் பெருக்கி முன்லிருத்தினதற்குக் குடுத்துக் கண்ட நவையித்தனை யென்று சொல்லவும்:—

அய்ங்ஹோணம் போன்ற நீலமளக்கும் வகையசுவது:—

வட்டத்தினளவு (வட்டத்தளவு) அளந்து அறைக்காலில் களித்து குருங்கோலுடனே பெருக்கி — ய ($\frac{1}{16}$)யில் களித்து நின்றதை முந்தியி ($\frac{1}{32}$)ல் களித்து நிலம் சொல்லவும்.

— ௮ — (10) தாத்தில் — அஞ்சமா-நிலம் உளுவன் ௫ (5) உரிக்காலால் செ-
சுல (40) பத்தாம் எ வருசையளந்தால் அ (8) எட்டாந்தாத்தில் — ஆருமா
நிலம் உளுவான் எ (7) உரிக்காலால் ரெல் பெவ்வளவு அளப்பானென்று
கேட்டால் அதற்கு வகை :—

௫ (5) ப—மாவும்-அ (8)ம் பெருக்கி எ (7) உறியிலும் பெருக்கி வைத்து-முத்து
கைமுதல் மற்றனாலு வகையும் பெருக்கி முன்னிருத்தினதற் குடுத்துக்
கண்டபிவை யித்தனை ரெல்லென்பது :—

வேறு :—

யிலங்கை-ளா (700) காதம்-ளறுப்புத்தாறை விட்டால் அதில் ஒரு விறற்கடைக்கு
ளா (700) எரும்பு துகையாக-ளா (700) காதவளிக் கு பெரும்புத்துகை
பெவ்வளவென்றால் சொல்லும் வகை :—

(இது சொல்வது :— முன்தூர அளவைப்படி சுலபமாகையினால் காத்தா
இதற்கு உதகரிக்கவில்லை என்பது.)

வேறு :—

கல்லளவு :—

உயி (20) முள நீளத்தில் — உயி (20) முள அகலத்தில் — சல (40) சாண் கனத்து
கல்லை — உயி (20) முள நீளத்தில் ௮ (10) முள அகலத்தில் — ச (4) சாண்
(கனத்தில்) கல்லு முறிக்க வேணுமென்றால் :—

வகை — உயி ரு உயி ருமாற :சா (= $20 \times 20 = 400$) யிதைக் கனமான — சல
(40)ல் மாற — ௮௦௦௦ (= $400 \times 40 = 16000$) யித்தை நிறுத்தி உயி (20)
முளத்துக்கும் — ௮ (10) முளத்துக்கும் மாற — ௮௦ ($20 \times 10 = 200$)
இதைக் கனமாகிய (வேண்டிய கனமாகிய சாண்) ச (4)ல் மாற —
அளவு = ($200 \times 4 = 800$) — [யிதை] இதைல் முன்னிறுத்தின —
௮௦௦௦௦ (16000) (ஐ)யியய்வு-உயி = ($\frac{16000}{800} = 20$)
ஆதலால் (கல்) உயி (20) முறிக்கலா மென்பது :—

சு (1000) முள அகலத்தில் — சு (1000) முள நீளத்தில் :— சு (1000) முள
கனத்தில் ஒரு கணு (என்றால் குன்று) — இதை ஒருமுள நீளத்தில் ஒருமுள
அகலத்தில் ஒரு முள கனத்தில் ($1 \times 1 \times 1$) ஒரு (ஒவ்வொரு) கல்லாக
முறித்தால் யெத்தனை கல் முறிக்கலா மென்றால் :—

சு ரு சு : யாசு (= $1000 \times 1000 = 1000000$) ; (பத்து ஹாயிறத்துக்கு
ஆயிரம் யாசு ரு சு = ௧ கோடி ரு = ($1000000 \times 1000 = 1000000000$)
நூறுக் கோடி — நிற்க :—

கரு. கரு : க; யிதை-க-ல் மாற-க = ($1 \times 1 \times 1 = 1$) யிதுக்கு முன்னிருத்தின
— ௧ கோடி (நூறு கோடி) [க்கு] — (ஐ)க்குடுத்த யிய்வு-௧ கோடி — ஆதலால் :—
— ௧ கோடி (100 கோடிக் கல்) முறிக்கலா மென்பது :—

வேறு:—

பலகையளவு:—

—ய-(10) முள நீளத்தில் உ (2) முள அகலத்தில்-அ (8) விரல் கனத்தில் பலகை (க) ரு (1க்கு) பணம் சு (6) ஆ-ரு (5) முள நீளத்தில்-க (1) முள அகலத்தில்-நாலு (4)-ச-விறல் கனத்தில்-பலகை-க (1) ரு பணம் எத்தனை யென்னில்:—

முன்னிறைய (10) ரு உ (2) ரு மாற $(10 \times 2 = 20)$ உய-யிறையெட்டில் மாறாகுய $(20 \times 8 = 160)$; யிறை நிறுத்தி — பின்னிறை-ரு ரு-ச ரு மாற உய $(5 \times 4 = 20)$ யிறை பணமாகிய-(6ல்) ஆறில் மாற உய (120)-இறை முன்னிறுத்தினாகுய (160) ருக் குடுக்கயிவ்வு- $ஜ = (\frac{120}{160} = \frac{3}{4})$ ஆதலால் [பணம் முக்கால்] என்பது.—

மற்றும் வந்தன வெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்:—

பணம்-க-ரு தூணி - ருய ஆ-ஷெ ரு பணத்து ரு யெத்தனை யென்றாலும் = பணம் - க-ரு த (தூணி) ஆ-உயச ரு நெல்லெத்தனை யென்றாலும் = பணம்-க-ரு படி ருய ஆ-நய படி யெத்தனை யென்றாலும்- பணம்-க-ரு சேற்-சவ-ஆ-க ப — உ ருசேறியெத்தனை என்றாலும் = ப—க-ரு பலம்-கவ-ஆ-அஜ-பலம் யெத்தனை யென்றாலும் = ப—க-ரு காய்- ருஇ-ஆ-ப—வ-ரு காய் யெத்தனை யென்றாலும்-இப்படிப்பட்டப் பலப்பலக் கொள் முதல் கணக்கு-கொள்முதல் (கொள்முதலெனத்தீர்க்கமாய் ஆராய்ந்து) விவிலைக்கும் ப— (பணத்து)க்கும் மாறச் சொல்வது.

வேறு:—

நய (30) னுள்-நய (30) பேர் சேவித்தானுக்கு-ய பணம் (10 பணம்)ஆ-யிரு (15) னுள் யிரு (15) பேர் சேவித்தானுக்கு (பணம்) யென்னவென்றால்:—

சொல்லவகை:—

நய ரு நய ரு மாற: கூா = $(30 \times 30 = 900)$ யிறை நிருத்திக் சடசியாகிய-யிரு-ரு யிரு-ரு மாற-உயயிரு $(15 \times 15 = 225)$ யிறை வுடனே- நடுவாகிய ஷெ ய ப— (10 ப—) ஆவது-யா $(10 \times 10 = 100)$ ல் மாற - உயஉயுருா = $[(100 \times 225) = (22500)]$ யிறை முன்னிருத்தின - கூா (900) ருக் குடுக்கயிவ்வு உயரு-(உ ப— ரு). $(25 - 2$ பணம் 5) என்பது:—

ரெண்டுசாண் மட்டில் குளி-ந (3) ரு முணுசாண் மட்டில் குழி யெத்தனை யெஸ் ரால்:—

முதல்-உ (2) ரு நடுவு-ந (3) ரும்மாற-சு (6) யிறைக்கடசி-ந (3) ருக் குடுக்க யிவ்வு- உ (2) ஆதலால் (2) (குழி) ரண்டு யென்பது:—

உய (20) னுள்-நய (30) பேருக்குச் சம்பளம் ஆ (8) மீர் (மாத்தில்) ய (10) விறு கன் பொன்னுலை பதினஞ்சு-யிரு (15) னுள்-சய (40) பேர் சேவித்தா னுக்கு எ (7) மீர் (மாத்தில்) யெத்தனை விறுகன் பெருவாரென்னில்:—

சொல்லவகை:—

கடசி மாத்து (எ = 7)ம் டி (10)ம் பாற எய் ($10 \times 7 = 70$) இதனுடனே ஆராவது சொன்ன-சயி (40)ல் மாற உசுஅர ($40 \times 70 = 2800$) இதுவுடனே அஞ்சாவது:யிடு (15) வுடனே மாற-சயிஉசு ($2800 \times 15 = 42000$) என்று நிரூபித்தி:—

முதலாவது சொன்ன இருவதும், ரெண்டாவது சொன்ன நயி (30)ம் பாற-சுர ($30 \times 20 = 600$)-நவது சொன்ன யெட்டில் மாற-சுசுஅர ($600 \times 8 = 4800$) இதற்கு அனைத்துக்கு ($\frac{42000}{4800}$).

யிய்வு = ($\frac{42000}{4800}$) = ($\frac{70}{8} = \frac{70}{8} = 6\frac{6}{8} = 6\frac{3}{4}$) ஆதலால் எட்டே முக்கால் (அது) (விராகன்) என்பதாம்:—

டி (10) - வயதில்—அ (8) கூத்தாடி - சு (6) வாகை கொள்வானுக்கு - எ (7) யீய் - டி (10) விராகனை - டி (5) வயதில் - ச (4) கூத்தாடி ந (3) வாகை கொள்வானுக்கு - ச (4) மாத்தில் யெத்தனைவிராக நென்னில்:—

சொல்லும் வகை:—

டி — (10)ம் - உ வது சொன்ன(அ)யெட்டில் ந வது சொன்ன-சு (6)ம் -சு வது சொன்ன -எ-(7)ம் கூடக் கூட்டின = (31) நயிக-யிதை நிரூபித்தி கடசியாகிய - டி - ச - ந - ச ($5 + 4 + 3 + 4$) = ஆ 16 (யிசு) - நடுவாகிய - டி (10)ம் மாறாகிய = ($160 = 16 \times 10$) இதை முன்னிருத்தின நயிக - (31) ருக் குடுக்க. யிய்வு - டிஹுசு = ($5 + \frac{1}{8} + \frac{3}{8}$) அஞ்சேரிக்காலே முக்காணி (சமரில்); ($\frac{160}{81} = 5\frac{5}{81}$) என்பது வெகுசுத்தமாம் ஆதலால் டிஹுசு விராகனென்பது:—

வேறு.—

அ (8) முள உசறத்தில் - டி (10) முள நீளத்தில் ச (4) சாண் கொம்பில் - சு (6) முளத்துதிக்கையில் ஆனைக்கு-டி (10) யீ-விராகன் நயி (50) ஆ - ச (4) முள உசறத்தில் - சு (6) முள நீளத்தில் - உ (2) சாண் கொம்பில் - ந (3) முளத்துதிக்கையில் ஆனை - க - (1) ரு விலை யெத்தனை யென்றால்:—

சொல்ல வகை:—

முதலாகிய-அ டி-ச-சு = ($8 + 10 + 4 + 6$) = ஆ - உயி (28) யிதை நடுவாகிய விராகன் நயி (50)ல் மாற-சுசா ($28 \times 50 = 1400$) - கடசியாகிய ($4 + 2 + 6 + 3 = 15$) இதை நயி (50)ல் மாற எாருடி (750) நடுவாகிய - டி (10) [அம்] மாற-எசுரு (7500) இதை முன்னிருத்தின சூசா (1400) க்குக் குடுக்க ஈய்வு ($\frac{7500}{1400} = \frac{75}{14} = 5\frac{5}{14}$) என்பது:—

யிசு (16) டிக்கோலால் ஓர்மா நிலம்-(ப-மா = $\frac{1}{20}$) ரு செ (கடமை) சயி (40ப—) ஆ டி (12) டிக்கோலால். நிலம்-ப-ரு-கடமை யெத்தனை யென்றால்:—

டி (12)யும்-யிசு (16) ருக்குடுக்க யிய்வு ($\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$) = (ஊ)-யிதைத் தன்னில் மாற-இய = ($\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$) = ($\frac{9}{16}$) இதைக் கடமையாகிய - சயி (40)ல் பெருக்க - உயி இ = ($\frac{9}{16} \times 40 = \frac{90}{4} = 22\frac{1}{2}$). ஆதலால்-உயி இ-என்பது:—

சு (6) உறிக்காலால்- π (100) னறு (நாறு கலத்துக்கு) அ (8) உறிக்காலால், யெத்தனை யென்றால்:—

முதலும் நடுவும் பெருக்கிக் கடசிக்குக் குறிக்கிறதுக்கு வகை:—

சு (6) π (100) பெருக்க - சு π ($6 \times 100 = 600$) கடசிபாகிப - அ (8) க்குக் குறிக்க எயிறு - $\pi = \left[\left(\frac{100 \times 6}{8} = \frac{600}{8} = 75 \text{ கலம்} \right) \right]$ இதுக்குக் குறுக்குத்தனம் (எவ்விதமென்றால்):—

சு.ம் து; π ம். எயிறு (நீம் $\frac{3}{4}$, 100ம் 75); அதாவது 8 ரு 6 = $\frac{3}{4}$, இந்த $\frac{3}{4}$ லால் 100 ஐப் பெருக்க:—

$(100 \times \frac{3}{4}) = 75$ - π எழுபத்தைந்து கல மெண்டது யின்னம் ஒருவகை:—

அஉ (8 உரி) க்காலால் - π (100) கலமும் சு (6) உக்காலால் நெல் யெத்தனை யென்னில்:—

அ (8)ம் (100) π -ம் பெருக்கிக்கடசி - π (6) ருக் குக்குடுக்க எய்வு
 $= \left(\frac{100 \times 8}{6} = \frac{800}{6} = 133 \frac{1}{3} \pi \right) = \pi \pi \pi$. போக நீல ரு -உ (2)
 ரு - π (6)ல் π (3)ல் பிரித்தால். உ (2) ஆனால் -க (1) ன ரு π (3)ல்-க(1)ரு
 பிரித்தால் - த (தூணி) ஆனால் -கஉ (நீஉரி) க்காலுக்கு யெத்தனை
 யென்னில் ஆனால் [$\pi \pi \pi$, π , த.] இங்கு (த = தூணி = (4) ச மரக்கால்)
 யென்பது:—

எ (7) உறிக்காலால் - π - π = (100 கலம்), அ (8) உறிக்காலுக் கெத்தனை யென்னில்:—

எ π π ரு மாற - π - π யிறை அ- π (குக் குக்குடுக்க) யீய யீய்வு
 $\left(= \frac{7 \times 100}{8} = \frac{700}{8} = 87 \frac{2}{4} = 87 \frac{1}{2} \pi \right)$ அயிஎஇள ஷெ அயிஎ- π
 தஹு (த = தூணி, ஹ = பதக்கு) π உறி, யென்பது:—

இதுக்குச் சு(ரு)க்கம்:—

முதலும் நடுவும் பெருக்கிக் கடசிக்கு எய்ந்து சொல்லுகிற தானம் சரிபே.—

கடைசியில்-அ(8) உறிக்காலென்று வந்தால் முதலும் நடுவும் மாறிக்கண்டதுகையை
 அறைச்சகாலில் களித்துக் கண்ட துகையை - [சு(1ல்) ஒன்றில் கழித்து நெல்
 - சொல்லவும்:—

(ப—க (1) ரு.) = பணம் ஒன்றுக்கு ஷெ 1 (நெல்) [π - π உறி] (முக்குறுணி
 முன்று உறி) ஆனால்- π ப— (36) பணத்துக்கு நெல் யெத்தனை யென்னில்
 யிதுக்குச் சுருக்குத் தானம்:—

(1) ள மரக்கால் - மெ (12); அதாவது ஓர் கலத்துக்குரிய மரக்கால் பண்ணிரடு (ஆகையாலே) பணமாகிய மூப்பத்தாறு—ரூப் பொன்னும் நூசுயி (36 × 10 = 360) மெ (12) ரூ நூசு (360) மீய யியவு = நூய (30) ஆயிந்த மூப்பதும் - ம - ரூக்குடுக்க நூ (3) ஆக்கிக்கொள்ள. நி. நூ உறி (மூக்குறுணி மூன்று உறி) ஆவது நூவூ மரற - மெ (10 $\frac{1}{2}$) யிறைக்கனப் படுத்த - நாகவ (101 $\frac{1}{2}$) ஆனால் - நாகவ - (நி)ந (101 கலம்-ஒரு முக்குறுணி) என்பது:—

கீழ்வாயிலக்கங்கேட்டதற்கு வகை:—

ஐ ரு ஐ யெத்தனை என்றால் - ஐ லும் நாலுபங்கு வச்ச ஒரு பங்கு தள்ளி மூனுபங்கும்-இய - ஆதலால் ஐ ரு ஐ: இய ($\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$) அறையே விசு பென்பதாம்:—

இ ரு இ ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$) என்னவென்றால்:—

படுவதி பண்ணி - வ ஆவதால் இ ரு இ: வ ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$) என்பது:—

வ ரு வ ($\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = ?$) யெத்தனை யென்றால்:—

வ = $\frac{1}{4}$ ன் ச (4)ல் க (1)ரு = ய ($\frac{1}{16}$) ஆனபடியினாலே வ ரு வ: ய ($\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$) விசம் என்பது:—

கள (=) கலவாய், த (தூணி) வாயி; ப (படி) வாய், (செ கீழ்வாயி) யிந்த நாலு வாயிலே யெது தூண்டிக் கேட்டாலும், கேட்டவகை சொல்லவும்.

சுள (கலம் 1க்கு) ரு ஐ (முக்கா) யெத்தனை யென்னில்:—

கள (1 ள) த்துப்படி - கூய (90) யிந்த - கூய - ம் முக்கா (ஐ) லில் கழிக்க - கூயெஇ ($90 \times \frac{3}{4} = 67\frac{1}{2}$) ஆயே-நாளி (ழி) யில் கழிக்க - ஸுபஉ உரி-ஆன படியினாலே—க ஐ ஸு பஉ உரி யென்பது.

த ரு ஸு யென்ன வென்றால்:—

த - ரு படி - நூய; நூய-பூ நூ ஐ; ஆனபடியினாலே—தரூபூ - நூ உறி நூ ஐ யென்பது:—

ப ரு வ யெத்தனை யென்னில்:—

ப. ரு. படி. கூ, கூ.வ - கஇ; ஆதலால்-ப. ரு. வ. (கஇ)உ-உரி யென்பது— உ (ரு) ஐ யெத்தனை யென்றால்:— உ ரு - சவடு—சய-ஐ: நூயிதனை. பூல் களிக்க:—நூ ஐ - ஆதலால்—உறி (ரு) ஐ: நூ ஐ:—

வேறு:—

க ய ($1 \times \frac{1}{16}$) முதல் கூய (90) வரைக்கு மெத்தனை யென்னில்:—

கூய (90) ரு இனம் - கூ (9) யிதுடனே - க - கூட்ட ம = ($9 + 1 = 10$) — இதில் பாதி—ரு; அஞ்சும் - கூ - ம் மாற = சயிரு ($9 \times 5 = 45$) — சயிரு (45)— சளருய (450)-சநூருள (4500)—ஆ சநூருளகூயரு ($4500 + 450 + 45 = 4995$) கூ. ரு. (இனம்—கூள = 900)ஐ களிக்க - கூள-போக-நீவ ரு-சநூகூயரு ($4995 - 900 = 4095$) இதைப் பிறந்த ய ($\frac{1}{16}$) வாயில் களிக்க - உளருயிருஐநூ ($\frac{4095}{16}$)

$= 255 \frac{1}{6} = 255 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16}$ என்பது:—

குழி க. ரு (குழி 1க்கு) ரு உரி னு (5உ உரி சுவடு) ஆ (சு) நிலத்துக்கு நெல்
யெத்தனைபென்னில்:

[குறிப்பு:— குழி என்பதின் $= (12 \times 12 = 144$ சதுர அடி
கொண்டது); (சு $= \frac{1}{16}$) என்பது அறைமா நிலம்:]

(சொல்ல) வகையாகப் பார்க்குதது:—

(ரு உரி னு) ஆவது (ருஇடு) என்று வைத்து - (மீ = மா) - நிலத்துக் - ப (மா) குழி
(குழி) உருய்சு (256) ஆக-சு ($\frac{1}{2}$ மா) ரு குழி ஈஉய (128) யிதை ருஇடு
($5\frac{5}{8}$) லுடனே மாற ($128 \times \frac{4}{5} = 720$) ளாஉய-யிதை-உறி வாயில் களிக்க :-
செ அள (8 ள) எட்டுக்கலம்:—

யிதுக்குச் சுருக்குத்தானம்:—

ரு உரி னு யு (ம்) ($5\frac{5}{8}$) = ருஇடு - (சு) வில்பாதி காணி ($\frac{1}{8}$) காணி (க = 1) - ரு)
முந்திர்ப்படுத்த ச ($4 = \frac{1}{8} \times 320 = \frac{3}{8} = 4$ ∴) ஆக்கிக்கொண்டு
(ருஇடு) லுடனேமாற உயெஇ ($22\frac{1}{2}$) யும் - த - வாயில் களிக்க - ளா (7ள)
எ மீ (7 மரக்கா) ஈ உறிமாவ [அ (8)] எட்டுமரக்கால் கூடக் கூட்டி 8 (அ)
அள (8 காலம்) என்பது:

குழி க ரு நெல் ச உறி - ஆ நில - ப - ரு நெல் யெத்தனையென்னில்:—

ச (4) (மா) உரியாவது - சஇ ($4\frac{1}{2}$) என்று சிறுத்தி — ப-வில் பாதி-ச - ரு - னு -
அ (8)ம் சஇ ($4\frac{1}{2}$) யுர்மாற-நுய்சு (36)ம் த-தூணி-வாயில் களிக்க-ள - அ-ம்
(கலம் - 8ம்) - ப- வாயில் களிக்க செ யெ (12) ள - இதுவுடனே - ச - ரு -
த - னு கூட்டிக்கொள்ள - செ யெ (12) ள; த னு கூட்டிக்கொள்ள —
யெ-ள-த-ளு) = 12 கலமும் தூணியும், பதங்கும் (என்று) இப்படிப்பார்த்
து க்கொள்ளவும்:—

குழி-க- ரு செ ப ஆ செ யள (கல = 10) ரு செ யெத்தனையென்றால் :-
குழியாவது - வடு ($\frac{3}{8}$); இதனுடனே யள - மாவது (10 - ம்) மாற ($\frac{3}{8} \times 10$)
 $= 3\frac{3}{4} =$ கூட-இதனை சு (6) ருக்குக்கே ஈயவு - இடு ($3\frac{3}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$) —
ப ($\frac{1}{2}$) வாயில் களிக்க ($\frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$) = சு - ரு - என்பது:—

மீ (மா) நிலம் - ப; ப—ரு செ யள (10 கலம்) ஆ குழி - அ - ரு நெல்
யெத்தனை யென்றால்:—

குழி - க - ரு - வடு - நெல் (இதை) பதிங்கலமான - யி (10)ல் மாற - கூட
($3\frac{3}{4}$) யிதை அ (8) டனே (யும்) மாற - நுயி (30) - யிதை (உறி) வாயில்
களிக்க செ - த:—

யிது தன்னிலும் விகடமாகச் சொல்லவந்தால்:—

வழு ($\frac{3}{8}$) ஆவது - ப ௮ (மகாணி = $\frac{1}{16}$); ப ௮ யும் ($\frac{1}{16}$ வையும்) க (1) -வழு ($\frac{3}{8}$) யும் (6) சு - ஆ வைத்துக்கொண்டு ௯௨ சு (6) உறி ஆனல் - ப - யும் ($\frac{1}{16}$ ம்), இஉறி ($\frac{1}{16}$ உறி), ரு ய ($\frac{1}{16}$) யிப்படிப் பார்த்துக் கொண்டு பார்க்குற கணக்கு முண்டு:—

யிது விரித்துக்காட்டல்:—

மீ (மா) நிலம் - ப - ரு - ௯௨ ருள - தரு உறி ஆ (கலம் = 5; த = 5, உறி நாழி ஆ (குழி) அ (8) ரு ௯௨ யெத்தனை யென்னில்:—

ருள (5 கலம்) ரு (5) சு (6) மாற நடு (30) ரு (5) ரு - இ ($\frac{1}{16}$) = உஇ ($2\frac{1}{2}$), னுளிக்ரு - ய ($\frac{1}{16}$) ஆ ரு - ப: வய ($\frac{1}{16} \times 5 = \frac{5}{16}$) ஆ நடுஉன ய ($32\frac{1}{16}$) யிதைக்குளியாகிய - அ (8) உடனே மாற - உளையுஇ ($32\frac{1}{16} \times 8 = 262\frac{1}{2}$) இதைக் குறுணிவாயில் களிக்க. —

யநுசு ($13 + \frac{1}{10} + \frac{1}{40} = 13\frac{1}{5}$) இதை னுளியில் கழிக்க னு உறி னு, ஆதலால், = னு உறி - னு - யென்பது:—

குழி - வழு - என்று வந்தால்:—

ப. (மா) - நிலம் - உளையுசு (மாநிலம் 256) ஆனபடியினாலே - கலமாவது - சுயசு (96) படியாகையாலே - இதை - உளையுசு (256) ருக்கீயப் பாய்வு ($\frac{96}{256} =$ வழு $= \frac{3 \times 32}{8 \times 32} = \frac{3}{8}$) பென்பது:—

ஆனபடியினாலே - குழி வழு (காலேரிக்கால்) ஆச்சுது:—

குறிப்பு:—

யெந்தக்கணக்குச் சொன்னாலும்: இப்படித்தானம் கண்டு பார்த்துச் சொல்லவும் - யிதுவும் - சு (9) (சு = 1) ளத்துக்கு மேல்வந்தாலும் - சில்வானங் கூட்டி விகடமாக வந்தாலும்:—

அதுக்கு - களரு (1 கலத்துக்கு) சு (6) ஆகவும்:—

னுளிக்ரு - ய ($\frac{1}{16}$) யித்தப்படி வைத்துப் பார்த்துக் கொள்ளவும்:—

(வேறு):—

பணவிடை அதை ($8\frac{3}{4}$) கொண்டது விறகனென்றும் - விறகன் - உயி (20) கொண்டது - பலமென்றும் - (விறகன்) உயிசு (24) கொண்டது - தாருபலமென்றும் - தாருபலம் - உயி (20) கொண்டது வீசையென்றும் - வீசை . ரு (5) கொண்டது துலாம் - என்றும் - யிதுவல்லாமல்:—

பலம் ச (4) கொண்டது சேர் என்றும் - சேர் - சய (40) கொண்டது மனு என்றும் இம்மதுற திருவடி தேசத்திலே நடந்து வருகிறது - அவ்வளவும் தேச பாசை (தேசபாசை) யாக நடக்கும்:—

வெள்ளரிக்கும் - ரெற்றினத்துக்கும் (— # த்தினத்துக்கும்) விகற்பம் வருமாறு:—

விளக்கம்:—

பணவிலை அஞ் ($8\frac{3}{4}$) கொண்டது வெங்கட்டாபனவிலவிட்ட கூ- பென்றும்:—

பணவிலை - டி (12) கொண்டது - களஞ்சு யென்றும்:—

களஞ்சு - க (1) க்து - மஞ்சாடி - உடு (20) என்று மாவ்பென்றும் ஆகையால்:—

மஞ்சாடியும் மாவஞ்சு:—

ஒரு மாவஞ்சுச் சிறுமா - ஈ (மும்மா) என்று சொல்லுவது:—

பு($1\frac{1}{6}$ = மாகாணிக்கு) ரு. மஞ்சாடி - கவ - ($1\frac{1}{4}$) என்றும் - ப. ரு ($\frac{1}{2}$) ரு = மாவஞ்சுச் சிறுமா - டி (10) மாயென்றும், [ச = சு] = $\frac{1}{8}$ ரு மஞ்சாடி அஞ் ($\frac{3}{4}$) சிறுமா - கூ (6) மாப்பொன்னென்றும் ($\frac{1}{3}$ =) கி = டு - குன்றிப் பொன்னென்றும் உ. ரு = ($\frac{1}{8}$) ரு ப (ப) மாவிலவு பென்றும் உ. டி = ($\frac{1}{8}$) ரு சிறுமா - ப விராகன் யென்றும்:—

சிறுமா - மாகா (160) கொண்டது களஞ்சு யென்றும் - வி.டி விராகன் — டி = (10) கொண்ட தென்றது:—

பணவிலை - க - (1) ரு - மஞ்சாடி - கஇலி ($1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = 1\frac{3}{5}$) - பென்றும் மாவஞ்சுக்குக் களஞ்சு மேல் விலையாகவும் - வெள்ளிக்கி - டி உடு ($12\frac{1}{2}$ - பணவிலை காசு-என்றும்-துலாம். உடு (20) பாயென்றும்:—

கொட்டப்பாக்கு - உடுசு (20000) இருபதாயிரம் - கொண்டது - க அவன பென்றும்:—

பரிமாணக்குங்கு மப்பூவுக்கும் - சச்சேரென்றும்:—

க ஸ்தா ரிக்கு அடைக மென்றும் - யிப்படிப் பேரிட்டுவரும் - (கூரின்) கூரின் பேரின்படியே விலைபிட்டுக் கொளளவும் - என்பது:—

அ (8) உக்காலால் ஷெ அள (8 கலத்து) ரு ஷெ ரிச (14) ஆக (9) உக் காலால் ஷெ. ருடி (50) ள ரு யெத்தனை யென்னில் - முன்யெட்டும், பின் யெங் (8) கலமாகிய - அ (8) ருத். தன்னையாற - கூாச (8 × 8 = 64) யென்று நீருத்தி - பின் - கூ (9)ம் - ருடி (50) ள மாகிய (50) ருடி -ம் பார (9 × 50 = 450) சாருடி - பின் நடுவாகிய - டிச (14) டும் பெருக்க (= 450 × 14 = 6300) = கூகூநா - யிதை முன்னிருத்தின கூடிச (64) ருக் குடுக்க - சப்பவு = கூடிஅவருடி (= $\frac{6300}{64} = 98\frac{7}{8}$); ஆதலால் - க ஷெ - கூடிஅவருடி ($98\frac{7}{8}$) என்பது:—

உடு (20) வீ— படியால் துலாம் - க (1) ரு ஷெ க ப-2 = (1 ப-2) ஆக. உடுச (24) வீ— படியால் துலாம்-டி (10) ரு. விலை பணம் யெத்தனை யென்றால்:—

ஐந்நதுகை விதற் ப மென்றறிந்து - முன் - உல (20)று (ம்) க (1)ம் - மாற - உல
என்று நிறுத்தி உாச (24)ம் - ல (10)ம் மாற உாச (24 × 10 = 240) -
இதுவுடனே - ல (1 × 10 + 2 = 12) ம் மாற - (2880) - உக அா அல
- பிதை முன்விருத்தின - உல (20) க்கையிப்படி - ஈசலிச = $(\frac{2880}{10}) =$
(144) ஆதலால் ஷி யச ப - ச = $(\frac{144}{10}) = 14$ ப - 4) பென்பது.

இந்த வகையிலே - பாக்கு மிளகு - ஆவினந்து - பெருங்காயம் - ரசம் - சாதி
லிங்கம் - கோஷ்டம் - மலாக்காய் - பச்சை - வெட்டு ஆட்டுக்கால் முரியன்
-சந்தனம் - கொம்பிராக்கு-கற்பூரம்-வசுகான்-குடன்-குத்துமம்-கோடுரசினை
சாம்பிராணி - தேங்காய்ப்பளு - மறபெண்ணை - தேன் - நெய் - யிர்த வகை
யிலாட மென்று வந்தாலும் - குணப்பட்டை - சாதிலிங்கம் - வங்காளப்
பச்சை - யிப்படிநிருக்கப்பட்டதும்.

அளக்கப்பட்ட - நெல் - அரிசி - கோதுமை - பருப்பு - பயரு - எள்ளு
ஆமணக்கு - முத்து - யிர்தவகையில் அளக்கப்பட்டதும் - சூரியவட்டம் -
ஏகாங்கு சிவப்புத்தாவத்திப்பச்சை - தாவத்தியளகு - வண்ணச்சுளிகை -
யிப்படிப்பட்டதுக்கெல்லாம் - ச (4)ம் - ஒண்ணுக்குப்பணமித்தனைபாக -
க (1) சமெண்டு-(ஒன்று முத்தகோண்டு) பெத்தனை சொன்னலும்-யிங்கனம்)
சொல்லப்பட்டதுக் கெல்லாம் முத்துகை விபரமென்றறிந்து சொல்லவு
மென்பது.

நவற்றின்னத்துக்கு (நவரத்தினத்துக்கு) விலைவக்கிரது (வைப்பது) சிகப்புக்கு
பணவிலையின் பேரிலே - வயிரத்துக்கு - ரதிபச்சமஞ்சாடி-அதைத்தன்னில்
மாறிக் கண்டதுகையை னு $(\frac{3}{1})$ லில் களித்துக்கண்டது சவ்வு யென்றும்,
வய்(வை)டுரியம் - கோமேதகம் - புஷ்பார்கம் நீலம் - இதுக்கெல்லாம் பண
விடை - பவளத்துக்குக் களஞ்ச-யிர்தப்படிக்கண மதியிலே (இந்தபடிக்காண
மதியிலே) வர்த்தகர் சேத்தியங்கண்டு விலைவக்கிரது.

நாகமீனறதுவே (நாகமென்றதுவே) - மாணிக்க மென்று பிறப்பிற்ற சிவப்புக்கு -
வடகம் - பாங்கிய உகைல சொதகு (சுரத்த) காந்தி - மாங்கிஷ்காந்தி -
யிளபாணிக்கம்-பைக்கொராவை-கட்டையிதுகளிலே லட்சமி விளைந்திருந்தால்
- (சுர்த்தப்) பச்சை-பச்சையகியலடி சக (சத்து)-க்கு முரு இனம் முக்கால்
இனம் - யிக்காந்தி யிதுகளிலே - பழபது புதியது - நீலத்தில் ஒருகும் நீலம்-
தூரும்புமிடிக்கிரது முண்டு - வெள்ளைப்பாங்கம்-யிதுக்கு-க குத்தமாந்தவிந்து
நாகவிந்து - வியாத்தில்-யநிம்-கப்புத் தெனவனனம். [(கப்புத்தேன்வன்னம்)
= (கொம்புத்தேன்வன்னம்)] தாமரைநிறம்-திரையுண்டாயிருக்க வேணும்.—

வயிரத்தில் ககைபுஷ்பராகம் - யிருகவிளவேணு சாம்பிலே கமபி விருந்தால்
விரும்பும் பியென்றும் - பெளம - பாந்திரையுண்டாகியது - கோமேதக
மென்று சொல்லும் முத்துக்குத் தெளிவு - காந்தியிருகி விருந்தால் ஆணி
முத்து யென்று பெறும் யிர்திரகோபகாந்தி சாம்பிராணி பவளமென்று(ம்)
பேர் ஆ நவற்றின்னம் ஒன்பது யென்று சொல்லவும்:—

தீர்வை:—

நிலம் - ப - ரு ஷெ ச ப— ஆ நில ரும் ப— சூ ரி - ரு தீர்வை - ப ரு
தீர்வை (தீர்வை) களிவு - ரி கீள் தள்ளி வ ச ப— வரி - ரு ப—
குவ போக நீ — க்ரு களிவு தள்ளி - ஷெ (நப — நன) ந ப
நன - யிதனை ரு ப — சூ ரி — உடனே பெருக்கி - ஷெ ப —
(வச ரி) யென்பது உ.—

வேலி - க - ரு — அ — ஆ வேலி - ரு - ம் - உ - நிலத்துக்கு யெத்தனை
பண மென்றால்:—

யெட்டையும் - அயி - ஆக்கி - ரு - ம் - உ — யுமாற - சாகு - யிதற்கு - சயி ப —
சு - யென்பது -

(மா-நில-) - ப - ரு ஷெ யிரு-ள. ஆ - யெசு குழி ரு பெத்தனை யென்னில்:—

யெசு ஐ, (குழி) யில்சளிக்க-ளாருயி (= $750 = 12000 \times \frac{1}{16}$) யிதனை $y = \frac{1}{16}$ ல்
களிக்க - சயிசு ஐயு - ($750 \times \frac{1}{16} = 46\frac{7}{8}$) யிதனை நிலமாக்க உ சயிசு —
சூ ரி - யிதனை - யிரு-ள மான - யிரு - உடனேமாற - ளாநயு - யிதனை கலப்
படுத்த - ளாந — ள (703 - ள) ப ச (ப 4) உ யென்பது :—

நெல்லு - ரு - உறி - குத்து அரிசி - ந உறி ஆ - அ - உறிக்காலால் ஷெ சுயி-ள (60 ள)
ரெக்குத்த விட்டால் - அ - உ - க்காலால் அரிசியெத்தனை யென்றால்:— யிதன்
கண்ணளிவு.

கவி:—

கடைதலைத்தான் பெருக்கிக் கண்ட துகையை நிருத்தி
நடுமூன்றுமாத்தி நடத்துபட நல்லீர் - ஆயந்த
கணக்கும்படியே அன்புடனே நின்றனகைக்
கியந்திடாய்— ச்சொன்னேனியம்பு: (55)

முன் - ரு - யும் - பின்னை (சு) யும் - நய ($5 \times 6 = 30$) நிருத்தி— 2 ஆவது
சொன்ன - ந - ம் - ந - வது சொன்ன - அ - ம் - யாற - உயிச - யிதை ச(4)வது
சொன்ன - சுயி - ம் - யாற - ச்சாசயி ($3 \times 8 \times 60 = 1440$) - யிதை முன்
நிருத்தின - நய - பெருக்கிய யிய்யு - சயிஅ - ஆதலால் - சயிஅ - ள
($\frac{3 \times 8 \times 60}{5 \times 6} = \frac{1440}{30} = 48$ - ள) அரிசி யென்பது :—

கவி:—

யிதையுமுளமென்றே யென்றறிந்து மடநல்லீர்
பூனுபடநல்லீர் நீருடனே மூன்றுதுகையும்
பெருக்கி முன்னின்ற தற்கிபந்து
யென்னே கணக்கென்றேயியம்.
யென்பது :—

(56)

அய்ந்துகை விகற்பமென்றறிந்து கொள்வது.

(அவை வருமாறு) :—

ரு (5) உக்காலால் ஐ ஹ (பதக்கு) அரிசி - ப உ உ (படி உ உ) ஆ
அரிசி - யசு (16) ள சு (6) உக்காலால் ஐ யெத்தனை யென்னில் :—

(ரு) வது சொன்ன (எ) ம். அஞ்சாவது சொன்ன - சு-ம் மாற - சயிஉ (6 × 7 = 42) நிருத்தி (2) வது சொன்ன - யசு - ம் முன் - ரு - ல் மாற - அயி - (16 × 5 = 80) - இதை ச - வது சொன்ன யசு-ல் மாற - உஅயி - இதை முன்னிருத்தின சயிஉ - ருக்குடுக்க யிய்வு நயிசவகிசு-உரி - இதை கலத்தில் கழிக்க - நயி - ள - த - ப ரு உ (30 கலம் - தூணி 1, ப 5 உரி :—)

சூறிப்பு:— மேலே சொன்ன - (உஅயி) என்பது - கணிதய்பபடி - சூஉஅயி (80 × 16 = 1280) ஆகவேணும்-என்பதுணர்க- ஓர் எழுத்தின் லக்கம் - சூ என்பது விட்டுப்போயிருக்கிறது:—

$$\left\{ \begin{array}{l} 16 \times 5 \times 16 \\ 6 \times 7 \end{array} = \frac{1280}{42} = 30\frac{1}{3} \right\} \text{யென்பது:—}$$

ருஉ ரு அரிசி-ரு-உறி ஆ-அஉக் காலால் அரிசி - நயிஉள (32 கலம்) - த - ஹ (தூணி - பதக்கு) ரு சுஉக் காலால் யெத்தனை யென்னில்:—

உ. ஆவது சொன்ன - ரு (ம்) - அஞ்சாவது சொன்ன-சு- (ம்) மாற்ற - (சயி) (இது தப்பு) ∴ (யசு), [முதலாவதும் மூனாவதுமான ரு-ம் - அ-ம் மாற] = (ரு × அ = சயி); (ருவில் விடப்பட்ட திவ்வள வாகுமென்பது சூறிப் பிங்கு) :—

இதுடனே - ச-ஆவது - நயிஉ-ள - எ = ? மீ (சு ம்) ஆன - நயிகஇ - யுமாற சூஉசுயி (31 $\frac{1}{2}$ × 40 = 1260) யிதை முன்னிருத்தினை-யஅ-ரு கீய்ய யிய்வு = எயி-ள (12 $\frac{60}{10}$ = 70-ள) என்பது:—

யசு - டிக்கோலால் மீ நிலம் - ப-ரு - () கடமை-சயி (பணம்) ஆ யிஉ - டிக் கோலால் - மீ நிலம் - ப-ரு - கடமை பணம் யெத்தனை யென்றால்:—

யசு - ரு - யிஉ யிய - யிய்வு-ஹ (முக்கா)-தன்னைமாற-இய - இதைக் கடமை-சயி-ல் மாற:—

40 × $\frac{5}{8}$ = 22 $\frac{1}{2}$ ப—) = உயிஉஇ. ஆதலால்-ஐ- 2 — 2 $\frac{1}{2}$ உஇ -யென்பது:—
எஉ க்காலால் - ஈ.ள - (100 - ள) - அஉ க்காலால் நெல் யெத்தனை யென்னில்:—

இதற்குச் சுறுக்குத்தானம்:—

எ. (ம). ஈ - (ம்) மாற - ஈா - (7 × 100 = 700). இதை அ-உக்காலில் களிக்க- அயிள இ (7 $\frac{0}{10}$ = 87 $\frac{1}{2}$) ஆதலால் - அயிள - ள, த. ஹ-ச.உ (87 $\frac{1}{2}$ ள = 87 ள - தூணி பதக்கு - 4உ)யென்பது:—

(உ) டிக்கோலால் குழி-ள-ல் டிசு - டிக்கோலால் குழி தெத்தனை யென்னில்:—

இதுக்குச் சுறுக்குத்தானம்:—

பின்-டிசு-றா - உ. றுக்கிய யீய்வு - ஹ = $(\frac{1}{16} = \frac{3}{4})$ முக்கால் - யிதைத் தன்னை
மாற - இய - (இதை) குழி யாகிய - ஈ - அடில் - மாற - டுயசுவ :—

இதற்கு வேறு வழிப்படியும்விடை.

இனத்தை இனத்தால் பெருக்கு இனத்தால் வகு என்பதின்படி நடத்த:—

கோல்களையே குழி செய்ய வந்ததால் பெருக்கி வகுக்க:—

நிலக்குழி 100ஐ $[(100) \times (\frac{1}{16})^2] = (100 \times \frac{1}{256})$

$[(100) \times (\frac{16 \times 9 = 144}{16 \times 16 = 256}) \times \therefore \frac{9}{16}]$

$(100 \times \frac{9}{16} = \frac{900}{16} = 56\frac{1}{4}) =$ குழி 56 $\frac{1}{4}$ (முன் போல்)

என்பது:—

யிப்படிச் செவ்வையாய் வந்தால் சுறுக்குத்தானம் பார்த்துச் சொல்லவும் —
செவ்வையாய் வறாதே போனால் - பெருக்கிச் சொல்லவும்:—

யிசு - டிக்கோலால் குழி - சா - (ம்) கண்டதொரு கோலாலனக்க (குழி) ஈ-அளந்த
கோலுக்கடி தெத்தனை யென்னில்:—

யிதுக்குச் சுறுக்குத்தானம்:—

சா - ம் முதல் - உயி, றா - உயி - சா - ஆதலால்:—

உயி - றாம் - உயி -.

(பின்பு) ஈ. யும் மூலப்படுத்த.

யி. றா - யி: ஈ-, ஆதலால் - யி, றா - உயி. ஈயயீய்வு = உ = முன் - யிசு - ல்மாற
- டுயிஉ:

[இதற்கும் முன் போல் திறை றுசிக (வர்க்க) கணிதப்படிக்கு:—

இங்கு (கோல் வர்க்க) $= \frac{400}{16} (16)^2 = 256 \times \frac{400}{16} = 256 \times 4 = 1024.$

$\therefore 1024$ ன் $= 32 \times 32 \therefore$ இதற்கு மூலம் $= 32.$

$\therefore 100$ குழியாக அளந்த கோல் நீளம் $= 32$ அடியென்பது:—

[குறிப்பு:— நிலக்குழி சொச்சத்தில் வந்தாலும் மேலே தனியாக என்னால்
காட்டப்பட்ட வழிகள், கோலுக்குஞ் சேர்ந்து கணிதத்தில் நன்றாக உபயோக
மாகும் - என்பதாம்]:—

செவ்வையாய் வந்தால் யிப்படிப் பார்க்கவும் - யில்லாத போனால் தானத்துப் படியே பார்த்துப் பெருக்கிச் சொல்லவும்:—

(ஸ்தானத்துப்படிப் பார்த்துச் சொல்லுமிவர்கள் வழி முன்னே கிரிவாக விளக்கப் பட்டிருக்கிறது - ஆனபோதிலு மிப்படிப் பார்ப்பது மிக்கக் கடினமே யாகுமென்பதுணர்க) :—

வினா விளக்க(ங்கள்)ம்—

- (ச)ல் பெருக்குவந்தால் (வ) வாயில் பார்க்கிறது— (1)
 (அ)ல் பெருக்கு வந்தால் (ஓ) வாயில் பார்க்கிறது (2)
 (டிசு)ல் ஷெ (ய) ஷெ (3)
 (நயஉ)ல் பெருக்க வந்தால் (ய) வாயில் களித்த துகையைப் பாதி செய்துச் சொல்லவும். (4)
 (சுடிசு)ல் பெருக்கு வந்தால் (ய) வாயில் களித்த துகையைக் கால்வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (5)
 (நாஉயஅ)ல் பெருக்கு வந்தால் (ய) வாயில் களித்துக் கண்டதை (ஓ) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (6)
 (உாநுடிசு)ல் பெருக்கு வந்தால் (ய) வாயில் களித்துத் திரும்ப (ய) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (7)

யிடை வேளித்தானம்:—

- (நு) பெருக்கு வந்தால் - (சு) வாயில் களித்துச் சொல்லவும். (8)
 (டி) பெருக்கு வந்தால் (கி) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (9)
 (உயி) பெருக்கு வந்தால் (ப) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (10)
 (சயி) பெருக்கு வந்தால் (சு) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (11)
 (அயி) பெருக்கு வந்தால் (ஜ) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (12)
 (நாகயி) பெருக்கு வந்தால் (நி) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (13)
 (நாஉயி) பெருக்கு வந்தால் (ஷு = முத்திரி) வாயில் களித்துச் சொல்லவும் (14)

மத்தும் வந்தனவெல்லாம் இப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்:—

(இன்னும் சில விசேஷம்) ஷெக்குத் தொடர்ச்சி குறிப்புகளிங்கு:—

ச. ரு. வ	4 க்கு ($\frac{1}{4}$)
அ. ரு. ஓ,	8 க்கு ($\frac{1}{8}$)
டிசு. ரு. ய,	16 க்கு ($\frac{1}{16}$)
நயஉ. ரு. கி,	32 க்கு ($\frac{1}{32}$)
சுடிசு. ரு. ஜஷு,	64 க்கு ($\frac{1}{64} + \frac{1}{320}$) = ($\frac{1}{64}$)
நாஉயஅ. ரு. டிசுஇ.	128 க்கு ($\frac{1}{160} + \frac{1}{640}$) = ($\frac{1}{128}$)
உாநுடிசு. ரு. ஷுகூவ,	256 க்கு ($\frac{1}{320} + \frac{1}{2560}$) = ($\frac{1}{256}$)
இப்படிப் பார்த்துக்கொள்ளவும்	512 க்கு = ($\frac{1}{640} + \frac{1}{5120}$) = ($\frac{1}{512}$)

ப — (பணம்) இ ஓ நெல்படி - நூஇஓ. ஆ ப — நூஇஓ ரு நெல்சொல்வது

[நடுவு நூஇஓ - யும், கடசி நூஇஓ - யும் மாற - நடுகஇஓஉலுவு -
இது முதலாகிய(தை) - இஓ—பேருக்குக் குறிக்க யிய்வு - நூஇஓ =]

(குறிப்பு:- இஓ = $\frac{5}{8}$. நூஇஓ = $5\frac{5}{8} = \frac{45}{8}$)

∴ ($\frac{45}{8} \times \frac{45}{8} \div \frac{5}{8} = \frac{2025}{64} \times \frac{8}{5} = \frac{405}{8} = 50\frac{5}{8}$) யென்பது.

ஸ் - டி - ரு - நெ - சய - ப — ஆ - டிடு ப — சூரிவுத-உரி ரு-யெத்தனை யென்
னில்:- டிடுநாநு- யும் - சயில் - மாற கூடீ - ப — எஇ - யென்று நிருத்தி
கூள - சயில் மாற நடு-நடு யும் - ய — வாயில் களிக்க - கனாஓ - ஆதலால்
முன்னிருத்தின துகையுடனே கூட்ட - கூடீ ப — கூவஓ.

[குறிப்பு:- மேற் சொன்ன டிடு ப — சூரிவுத - என்பது டிடுநாநு-சூரிவுத -
என்றிருக்க வேணும். இவ்விதமிருந்தால் தான் கீழ் சொன்னவிடை - கூடீ -
கூவஓ ருச்சரி வருகின்றது:—

விவரணம்:-

$(40 \times 15\frac{15}{16} + \frac{3}{8} \times 40 + \frac{1}{160} \times 40 + \frac{1}{320} \times 40),$

$(\frac{3}{8} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = \frac{3}{64}) (40) = (\frac{1520}{64} = 1\frac{7}{8})$ என்று நிருத்தி

$15\frac{15}{16} \times 40 = 63\frac{15}{16}.$

இங்கு $16 = 10, \therefore 12 = 7\frac{1}{2} \therefore 63\frac{15}{16} = 7\frac{1}{2}.$

இந்த $63\frac{15}{16} = 7\frac{1}{2}$ யுடன் முன்னிருத்தின $1\frac{7}{8}$ ப—வும் கூட்ட $(63\frac{15}{16} + 1\frac{7}{8}).$

$= 63\frac{15}{16} + 1\frac{7}{8}$ என்பது சரியான விடையாக வருகிறது கவனிக்கவும்.

ஆகையால் இங்கு - (டிடுநாநு-சூரிவுத) (சய) = (கூடீ ப — கூவஓ)

$= 40 (15 + \frac{15}{16} + \frac{3}{8} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 15\frac{315}{320}),$

$= (40 \times 15 + \frac{315}{8} \times 40)$

$= (600) + (\frac{315}{8} \times 40 = 39\frac{3}{8}) = 639\frac{3}{8}$

இதை

10ல் வகுக்க $(639\frac{3}{8} \times \frac{1}{10})$

$= 63\frac{3}{8} - 9\frac{3}{8}$ இதற்குச் சரியாகத் தமிழ் லக்கப்படிக்கு - கூடீ ப - கூவஓ]

யென்பது:—

(வேறு):

ச - சாண் சுத்தில் - டி மூள நீளத்தில் - மரம் - சு ரு விலை நெ கூ — ஆ -

நு - சாண் சுத்தில் - டிடு - மூல நீளத்தில் மரம் - டிடு - ரு விலையெத்தனை
யென்னில்:—

- முதல் - ச - ந்தன்னால்வாற - யிசு - இதை மூளம் - யில் மாற - ஈசுயி - யிதை
 நிருத்தி யின் - று-ம் தன்னில் மாற உயிடு - இதை மூளம் - யிடு ல் மாற -
 ஈசுயிடு யிதை - யி - உடனே மாற - ஈசுயிடு - இதை முன்னிருத்தின
 ஈசுயி — ருக் குடுக்க யிய்வு - உயிடுவாற — :—

$$= \left\{ \left(\frac{5 \times 5 \times 15 \times 10}{4 \times 4 \times 10} \right) = \left(\frac{3750}{160} \right) = \left(23 \frac{7}{16} \right) \right\},$$

இங்கு செ $\frac{7}{16}$ ஐ 10ல் பெருக்க — $4\frac{3}{8} = \left(\frac{70}{16} = 4\frac{6}{16} \right) \times (23 \text{ ப } - 4\frac{3}{8})$ ஆதலால் செ உயிடு ப — சவடு என்பது :—

இம்பி (யி) ரு வகை :—

• ஏத ரு ஏத - கீ ஏத ரு இம்மி - யிடு; இம்மி - ஏத ரு துட்பம் ஈடு - துட்பம் -
 ஏத - ரு அதி துட்பம் - எடு; அதிதுட்பம் ஏத ரு திட்பம் யிடு - திட
 பம் ஏத ரு அதிடபம் உயிடு அதிடபம் - ஏத - ரு - அற்பம் சடு -
 அற்பம் ஏத ரு அதற்பம் சயிடு; அதற்பம் ஏத ரு சாரம்-யிசு-ஆ கீள்தானம்
 யிர்தப்படி பார்க்கவும்

இதற்கு விவரணம் :—

(ஏத) முந்திரி என்பது $\frac{1}{320}$; இந்த முந்திரிக்கு முந்திரி கீழ் முந்திரி
 $= \left(\frac{1}{320} \times \frac{1}{320} \right) = \frac{1}{102400}$.

இப்படி வந்த இந்த கீழ் முந்திரிக்கு $\left(\frac{1}{102400} \right)$ இம்மி $10\frac{1}{2}$ பத்தரை

இம்மி முந்திரிக்கு துட்பம் $3\frac{1}{2}$ (முன்றறை)

துட்பம் முந்திரிக்கு அதிதுட்பம் $7\frac{1}{2}$ (ஏழறை).

அதிதுட்பம் முந்திரிக்கு திட்பம் 15 (பதினேந்து).

திட்பம் முந்திரிக்கு அதிடபம் $22\frac{1}{2}$ (இருபத்திரண்டறை).

அதிட்பம் முந்திரிக்கு அற்பம் $4\frac{1}{2}$ (நாலறை)

அற்பமுந்திரிக்கு அதற்பம் 45 (நாற்பத்தைந்து)

அதற்ப முந்திரிக்கு சாரம் 11 (பதினொன்று).

ஆகக்கீள் தானம் இந்தப் படிப்பார்க்கவும்.

• இன்னும் விவரண மிங்கு :—

பகுப்பளவைக்கு :—

ஒன்று (1) க்கு முந்திரி (320).

• ஒன்று (1) க்குக் கீழ் முந்திரி — (102400) இந்தக்

கீழ் முந்திரி ஒன்று (1) க்கு :—

இம்மிமுந்திரிகள் = 3360.

நுட்ப முந்திரிகள் = $(3360 \times 1120) = 3763200$.

அதிநுட்ப முந்திரிகள் = $(3763200 \times 2400) = 9031680000$.

திடப்பமுந்திரிகள் = $(9031680000 \times 4800) = 43352064000000$.

அதிடப்பமுந்திரிகள் = $43352064000000 \times 7200$
= 312134860800000000.

அற்பமுந்திரிகள் = $(312134860800000000 \times 1440)$
= 449474199552000000000.

அதற்பமுந்திரிகள் = $(449474199552000000000 \times 14400)$
= 6472428473548800000000000.

ஸரங்கள் = $\left\{ 6472428473548800000000000 \times 11 \right\}$ ஆ புள்ளிகள்
= $\left\{ (71196713209036800000000000) \right\}$ = 26

ஆகையாலிங்கு ஒன்றுக்குச் சரங்கள் (1 ருச் சரங்கள்)

= $(71196713209036800000000000 \times 102400) \therefore$

= 729054343260536832000000000000.

ஆகப் புள்ளிகளிகள் (ஆகஸ்த்தானகள்) = 31 ஆகும்.

ஆகக் கீள்தானம் யிர்த்தப்படிப் பார்க்கவும்.

ஸ்ரீ ராமந்துணை ஸ்ரீனு செய்யும் குருவே துணை.

—: கடவுள் துதி (வாழ்த்தல்):—

ஆக்கலால் பிரமனென்றும் காத்தலால் விஷ்ணு வென்றும்

அழித்தலா லீசனென்று மாகிய மூலப்பொருளே

அனுக்ஷணம் மனதில் நிற்பாய் அழிவிலாத் தானங்கொடுத்துச்

சுடுதியில் காற்றிடாய் நீ கடவுளே நிற்பதங்கள்

நானென்ற வகமொழிந்தேன் கடுகவே அனந்தம் போற்றிப்

படிப்பவர் பார்ப்போர் கெழப்போ ரனைவரும் வாழி வாழி.

ஈசன் துணை ஈசன் ஈசனுக்குக சுபம் சுபம் சுபம்

முற்றும்.

ஸ்ரீ :

பிழை திருத்தம் விடுபட்டவை

பக்கம்	வரி	தப்பு	சரி
11	24	ஸ - ல	ப
25	10	கஹ	சு
61	9	(87ம் 88ம்)	(59 ம்)

55ம் பக்கம் வரி 9ல் உள்ள—“ பரிதி” —(இதற்குமேல்)

“விபுத (33) நேத்ர (2) கஜாஹி (88) ஹுதாசு (3) த்ரிதச (33) வேத (4) ப (27) வாரண (8). பாஹவ : (2)—நவநிகர்வ (900000000000) மிதேவ்ருதி விஸ்தரே பரிதிமாநமிதம்—ஜகுர்ப்புதா:”

என்கிறபத்யத்தினால் —(சுற்றளவச்)—என்று படிக்கபேண்டியதாகும்.

PRINTED AT SOLAR WORKS,
12, THAMBU CHETTY STREET,
MADRAS-1.